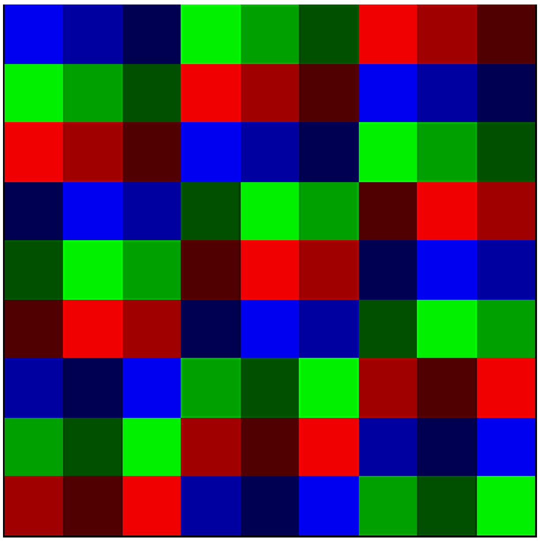
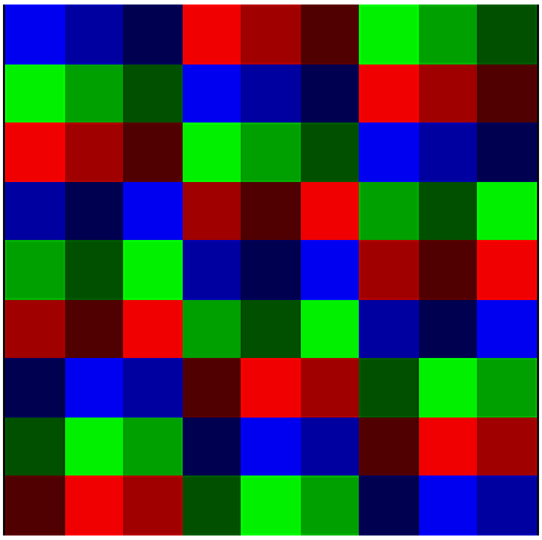
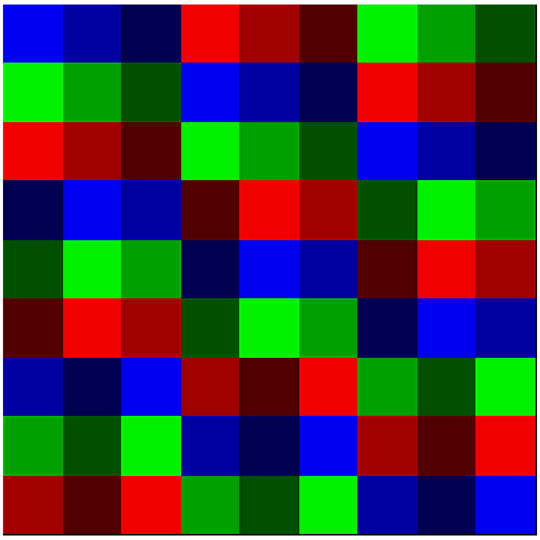
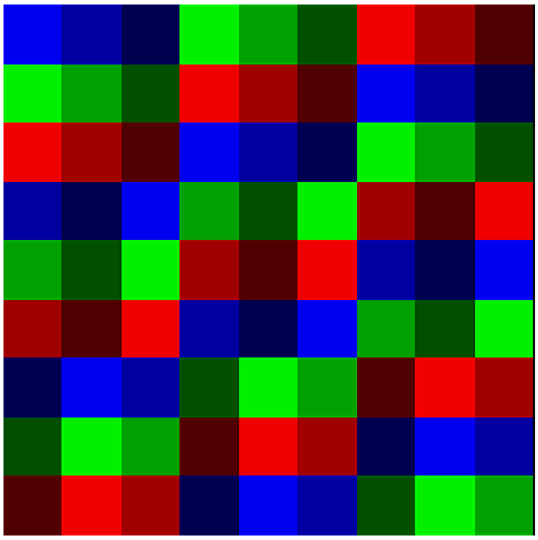
Sudoku-Ornamente

Von Fritz Ostermann mit Grafiken von Hendrik und Gerrit Herrmann,
November 2012/Januar 2013









Das Titelblatt zeigt eine Palette von vier Sudoku-Ornamenten mit einer Symmetriegruppe der Ordnung 9.
Der strukturelle Hintergrund wird in dieser Arbeit dargelegt und das begriffliche Umfeld beschrieben, in das sie eingebettet sind.

Sudoku-Muster

Ein Sudoku-Muster ist eine mit 9 Symbolen belegte 9x9- Matrix, die in bekannter Weise neben ihren 9 Zeilen und 9 Spalten durch 9 Blöcke strukturiert ist. Die Verteilung der Symbole auf die 81 Felder genügt den Sudokubedingungen. Wir notieren die Symbole gemäß ihrer Verteilung im Block e oben links zeilenweise durch die Tripel (1,2,3), (4,5,6), (7,8,9) und dem entsprechend spaltenweise die Tripel(1,4,7), (2,5,8), (3,6,9) und basieren damit ein Sudoku-Muster auf einem normierten Sudoku. Die Symbole sind abhängig von der Zugehörigkeit zur Zeile und zur Spalte im Normblock $e=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ nach zwei überlappenden Merkmalen mit je drei Ausbildungen; beispielsweise - wie in den Grafiken realisiert - für die Zeilen durch die 3 Farben blau, grün, rot und für die Spalten durch die drei Helligkeiten hell, mittel, dunkel.
Die dem Normblock e aufgeprägte Symbolik liefert den Symbolblock e_s. Im Sudoku-Muster liegt er oben links.
Zwei Muster sind gleich, wenn sie auf dem gleichen Sudoku basieren und ihre Symbolblöcke übereinstimmen.

Ähnliche, duale und affine Sudoku-Muster

Sudoku-Muster sind **ähnlich**, wenn sie auf dem selben normierten Sudoku beruhen und die Ausprägungungen der Merkmale permutiert sind. Deren Symbolblöcke e_s,$e_{s'}$ sind durch eine Zeilen-oder Spaltenpermutation miteinander verbunden.

Zu einem gegebenen Muster entsteht das zugehörige **duale Muster**, wenn im Symbolblock e_s das Zeilenmerkmal mit seinen drei Ausprägungen den Spalten und das Spaltenmerkmal mit seinen drei Ausprägungen den Zeilen zugeordnet wird.

Es gibt auch stets eine Transformation eines Musters, bei der der Symbolblock oben links verschwindet, an anderer Stelle im Blockschema erscheint und durch eine Ziffernpermutation des e-Blocks darstellbar ist. Derart entstandene Muster nennen wir **affin** zum vorgelegten Muster. Im „affin zentrierten Muster“ liegt der Symbolblock mittig im Blockschema. Das zugrundeliegende Sudoku ist dann „zentral normiert“.

Analog-Muster

Zu jedem Sudoku-Muster mit seinem Normblock oben links gibt es stets acht nicht notwendig verschiedene Analog-Muster. Sie ergeben sich, wenn man den Normblock in Verbindung mit den anderen Blocks zyklisch vertikal oder horizontal oder beides um eine oder zwei Positionen verschiebt. Jedes Sudoku-Muster mit seinem Symbolblock oben links wird als

Repräsentant der Klasse der ihm zugehörigen Analog-Muster gesehen. Ihnen allen liegt das gleiche normierte Sudoku zugrunde.

Notationen der Sudokuoperatoren

Die 5 Permutationen neben der Identität 1=id der von oben nach unten 1,2,3 indizierten 3 Blockzeilen notieren wir wie in [1],[9] in Zyklendarstellung R= (1,2,3), RR= (3,2,1) R_1 =(2,3) R_2=(1,3) R_3 = (1,2). Analog indizieren und notieren wir die Permutationen der jeweils drei lokalen Zeilen einer Blockzeile durch r,rr,r_1,r_2,r_3 neben der Identität 1=id und fassen in bezug auf die Blockzeilen diese lokalen Permutationen allgemein zu einem geordneten Tripel $g_1 \bullet g_2 \bullet g_3$ zusammen. Entsprechend indizieren und notieren wir die Blockspalten neben id die Permutationen der Blockspalten S,SS, S_1, S_2, S_3, sowie die lokalen Permutationen der Spalten in den 3 Blockspalten durch s,ss,s_1, s_2, s_3 und fassen sie allgemein zu einem Tripel $h_1 \bullet h_2 \bullet h_3$ zusammen. Die Menge aller Transformationen eines Sudokus A, die sich durch Hintereinanderausführung durch Permutationen ergibt, notieren wir G_0. Sie ist ein semi-direktes Produkt von acht Komponenten isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 und wird „ kleine Sudokugruppe“ genannt. Nähme man das Transponieren eines Sudokus hinzu, so ergäbe sich die Sudokugruppe G. Bei der Transformation eines Sudokus A durch ein Element $\varphi \in G_0$ werden insbesondere Blöcke auf Blöcke abgebildet. Dabei bleiben die Dreiermengen der Zeilen als auch die der Spalten eines Blocks invariant. Diese Invarianten der Gruppe G_0 hat Arnold Schönhage entdeckt und zum computergestützen schnellen Auffinden und Zählen aller Fixsudokus in der Gesamtheit aller Sudokus genutzt. Sie bekommen hier Bedeutung für die Klassifikation der Sudokumuster
Die Menge aller lokalen Permutationen der Zeilen der mittleren als auch unteren Blockzeile notieren wir $T_{2x3}(r)$ und deren Elemente als Tripel allgemein $1 \bullet u_2 \bullet u_3$.Analog notieren wir die Menge aller Permutationen der Spalten der rechten als auch mittleren Blockspalten $T_{2x3}(s)$ und deren Elemente als Tripel allgemein $1 \bullet v_2 \bullet v_3$. Das direkte Produkt dieser zwei Gruppen notieren wir kurz T_{2x3} und Elemente aus ihr allgemein durch w= $u \bullet v \in T_{2x3}$,wobei $u \in T_{2x3}(r)$ und $v \in T_{2x3}(s)$ ist. Der Normblock e oben links bleibt bei jeder Operation aus dieser Gruppe invariant und damit die Basis der Symbolgestaltung.

Sudoku-Ornamente

Die meisten Sudoku-Muster haben keine Symmetrien, d.h. es gibt kein Erzeugnis der angegebenen Permutationen ungleich id, die das Muster auf sich abbilden. Solch ein Sudokumuster nennen wir „ freies Muster“. Unter den restlichen Mustern gibt es solche mit zwei Fixoperatoren ungleich id aus G_0.Solch ein Sudokumuster nennen wir Halb-Ornament. In der Menge der genormten Sudoku-Muster erkennt man abhängig vom Typ der Fixoperatoren entweder vertikal oder horizontal oder haupt-oder nebendiagonal sich entwickelnde Muster . Ihr Muster basiert auf normalen Fixsudokus mit einer Fixgruppe der Ordnung 3 vom R-Typ,S-Typ, bzw. vom RS-Typ oder RSS-Typ.
Deutlich weniger Sudoku-Muster gibt es mit 8 Fixoperatoren ungleich id aus G_0, also einer Fixgruppe der Ordnung 9. Sie bilden in der Menge der Sudoku-Muster die Klasse der Sudoku-Ornamente. Basis ihrer Ornamentik sind normierte superfixe Sudokus, kurz normierte Superfixe. Normierte Superfixe haben Fixoperatoren vom R-Typ als auch einen vom S-Typ und damit Fixoperatoren der Form $g_1 \bullet g_2 \bullet g_3 \bullet s \bullet s \bullet s \bullet R$ oder $g_1 \bullet g_2 \bullet g_3 \bullet ss \bullet ss \bullet ss \bullet R$,wobei $g_3 \bullet g_2 \bullet g_1 = 1$ ist, sowie Fixoperatoren $r \bullet r \bullet r \bullet h_1 \bullet h_2 \bullet h_3 \bullet S$ oder $rr \bullet rr \bullet rr \bullet h_1 \bullet h_2 \bullet h_3 \bullet S$, wobei $h_3 \bullet h_2 \bullet h_1 = 1$ ist. Notiert man den Fixoperator eines Superfixes A vom R-Typ durch α und den vom S-Typ durch β, so kann man die Fixgruppe F(A) als das Erzeugnis $[\alpha,\beta]$ dieser

Fixoperatoren, deren Ordnung stets 3 ist, darstellen. Die Fixgruppe eines Superfixes operiert transitiv auf der Menge der Blöcke des Superfixes. Die im Normblock e dargestellte Symbolgestaltung zeigt sich somit in jedem Block des Ornaments. Es gibt insgesamt 36•36•4=5184 normierte Superfixe und damit derart viele Basen für Sudoku-Ornamente. Diese Superfixe werden erfasst von den T_{2x3}-Bahnen der von Arnold Schönhage entdeckten Sudokus U_1, U_2, U_3, U_4 gemäß der Liste L4eee [4] . Grundbeispiel zur Sudoku-Konstruktion von W.Jehne [10] ist das Sudoku C= U_2

$$U_1=\begin{pmatrix} e & rrsse & rse \\ rse & e & rrsse \\ rrsse & rse & e \end{pmatrix}, \; U_2=\begin{pmatrix} e & rse & rrsse \\ rrsse & e & rse \\ rse & rrsse & e \end{pmatrix},$$

$$U_3=\begin{pmatrix} e & rsse & rrse \\ rrse & e & rsse \\ rsse & rrse & e \end{pmatrix}, \qquad U_4=\begin{pmatrix} e & rrse & rsse \\ rsse & e & rrse \\ rrse & rsse & e \end{pmatrix}$$

Deren Fixgruppen sind

F(U_1)=[r•r•r•s•s•s•R,rr•rr•rr•ss•ss•ss•S] ,
F(U_2)=[rr•rr•rr•ss•ss•ss•R,r•r•r•s•s•s•S],
F(U_3)=[rr•rr•rr•s•s•s•R•r•r•r•ss•ss•ss•S]
F(U_4)=[r•r•r•ss•ss•ss•R,rr•rr•rr•s•s•s•S]

Man sieht leicht, dass als Produkt der Erzeugenden zu jeder der Fixgruppen der rein globale Operator RS ist.

Unitäre Sudoku-Ornamente

In jeder der vier Bahnen gibt es genau ein normiertes Superfix, dessen Fixoperator vom R-Typ als auch vom S-Typ reduziert ist.
In deren Fixoperatoren vom R-Typ sind die Tripel g_3•g_2•g_1 auf 1•1•1 reduziert, ebenso vom Fixoperator vom S-Typ die Tripel h_3•h_2•h_1. Diese Tripel können weggelassen werden.

Es sind folgende Bahnelemente

U_1***= 1•rr•r•1•s•ss U_1 U_2***= 1•r•rr•1•ss.s U_2 U_3***= 1•r•rr•1•s•ss
U4***= 1•rr•r•1•ss•s $U_{4.}$

Damit ist

$$U_1^{***}=\begin{pmatrix} e & rre & re \\ se & rrse & rse \\ sse & rrsse & rsse \end{pmatrix} \qquad U_2^{***}=\begin{pmatrix} e & re & rre \\ sse & rsse & rrsse \\ se & rse & rrse \end{pmatrix},$$

U_3***= $\begin{pmatrix} e & re & rre \\ se & rse & rrse \\ sse & rsse & rrsse \end{pmatrix}$ U_4***= $\begin{pmatrix} e & rre & re \\ sse & rrsse & rsse \\ se & rrse & rse \end{pmatrix}$,

U_1*** ist das von A. Schönhage 2009 angegebene Urbeispiel eines Superfix.

Wenn einem Sudoku-Ornament eines der Superfixe U_i*** $i \in \{1,2,3,4\}$ zugrunde liegt, nennen wir das Ornament unitär. Die anfangs gezeigten Grafen sind Beispiele dafür.

Deren Fixgruppen sind

F(U_1***)=[s•s•s•R,rr•rr•rr•S] F(U_2***)=[ss•ss•ss•R,r•r•r•S]
F(U_3***)=[s•s•s•R,r•r•r•S] F(U_4***)=[ss•ss•ss•R,rr•rr•rr•S]

Für die vier Superfixe Ui *** (i=1,2,3,4) hat man folgende Abhängigkeiten
U_4***= R_1• U_1*** U_3***= S_1• U_1*** U_2***= R_1• S_1 • U_1***.
Es genügt somit die Verteilung der neun Symbole 1,2,3,…,9 in den Blocks von U_1*** zu kennen. Es sind neben der Verteilung im Normblock e= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ die folgenden acht

Verteilungen:

rre= $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ re= $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ se= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ sse= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ sowie

rrse= $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ rse= $\begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ rrsse= $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ rsse= $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

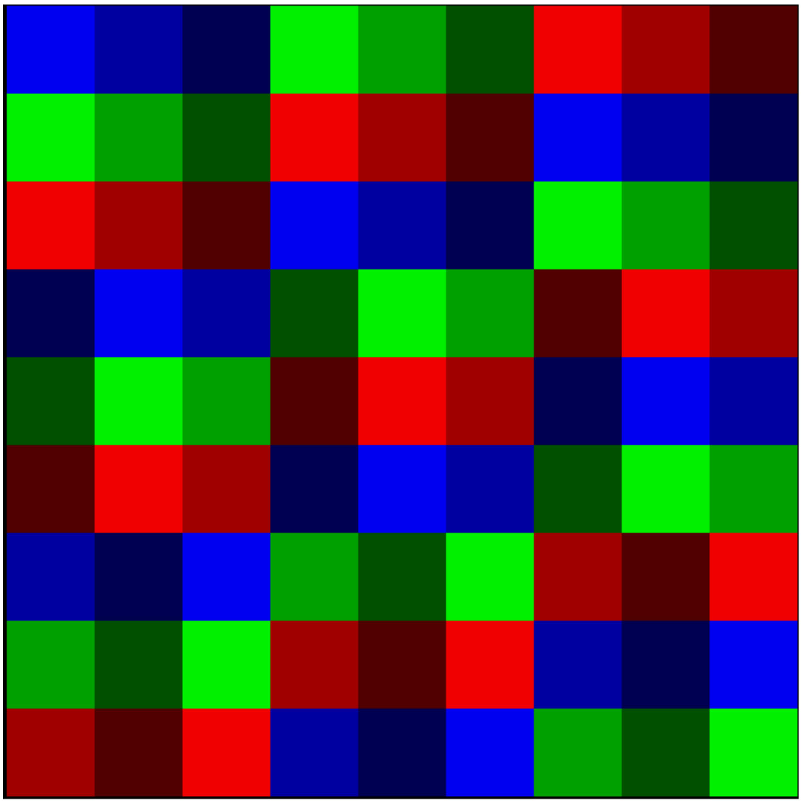


Abb.1. Unitäres Ornament U1***

Konjugationen von Fixoperatoren

Legt man einem Ornament einem zu U_i*** $i \in \{1,2,3,4\}$ konjugiertes Sudoku A zugrunde, so interessiert, wie man zu einem Fixoperator φ des betrachteten U_i***den zu φ konjugierten Fixoperator φ' von A berechnet. Ist beispielsweise A konjugiert zu U_1*** und notieren wir dies durch $w \bullet A = U_1$*** alias $A = w^{-1} \bullet U_1$***,wobei $w = u \bullet v = 1 \bullet u_2 \bullet u_3 \bullet 1 \bullet v_2 \bullet v_3$ ist, so ergibt sich $\varphi' = w^{-1} \bullet \varphi \bullet w$. Für $\varphi = \alpha = s \bullet s \bullet s \bullet R$ erhält man den zu α konjugierten Fixoperator $\alpha' = w^{-1} \bullet s \bullet s \bullet s \bullet R \bullet w$. Ausmultipliziert ergibt dies gemäß der Vertauschungsregel $R \bullet 1 \bullet u_2 \bullet u_3 = u_3 \bullet 1 \bullet u_2 \bullet R$ den Fixoperator
$\alpha' = u_3 \bullet u_2^{-1} \bullet (u_3^{-1} \bullet u_2) \bullet s \bullet (v_2^{-1} \bullet s \bullet 1 \bullet v_2) \bullet (v_3^{-1} \bullet s \bullet 1 \bullet v_3) \bullet R$.
Ist nun $w = u \bullet v = 1 \bullet rr \bullet r \bullet 1 \bullet s \bullet ss$, also $u_2 = rr, u_3 = r$, $v_2 = s$, $v_3 = ss$, so ergibt sich $\alpha' = r \bullet r \bullet r \bullet s \bullet s \bullet s \bullet R$. Für den Fixoperator $\beta = rr \bullet rr \bullet rr. \bullet S$ von U_1*** ergibt sich analog der Fixoperator $\varphi' = w^{-1} \bullet \beta \bullet w = r \bullet r \bullet r \bullet s \bullet s \bullet s \bullet S$. Exemplarisch ist damit gezeigt, wie sich die Fixgruppe $[\alpha, \beta]$ von U_1*** in die Fixgruppe $[\alpha', \beta']$ von $A = w^{-1} \bullet U_1$***$= U_1$ transformiert.

Lokal-zyklische Sudoku-Ornamente

Lokal-zyklische Ornamente basieren auf normierten Superfixen, deren Fixgruppen von Operatoren α,β vom R- bzw. S-Typ erzeugt werden, die keine Transpositionen, sondern neben 1=id nur Dreier- Zyklen, enthalten.
Sie liegen in den T_{2x3}^0 -Bahnen von U_i*** $i\in\{1,2,3,4\}$. T_{2x3}^0 ist die maximale Untergruppe von T_{2x3}, deren Tripel keine lokalen Transpositionen enthalten und hat 9•9=81 Elemente. Damit gibt es 4•81=324 lokal- zyklische Superfixe. Die Blöcke solcher Superfixe gehören stets zur Menge jener neun Blöcke, die im Superfix U_1*** vorkommen.Die Art und Lage dieser Blöcke im normierten Superfix wird durch die Fixoperatoren α,β bestimmt.
Beispiele lokal zyklischer Sudoku-Ornamente liefern folgende Sudokus (1) Die Palette der U_i $i\in\{1,2,3,4\}$,in deren Fixgruppen $F(U_i)= [\alpha_i, \beta_i]$ stets der reduzierte globale Operator $\alpha_i\bullet \beta_i$ = RS liegt. (2)
Die Palette der $U_i' = R_1\bullet U_i$ $i\in\{1,2,3,4\}$ in deren Fixgruppen stets der reduzierte globale Operator RSS liegt. Es ist

$U_1' = R_1\bullet U_1 = (1\bullet r\bullet rr) \bullet (1\bullet s\bullet ss)\ U_4$ $\quad U_2' = R_1\bullet U_2 = (1\bullet rr\bullet r)\bullet(1\bullet ss\bullet s)\ U_3$

$U_3' = R_1\bullet U_3 = (1\bullet r\bullet rr) \bullet (1\bullet ss\bullet s)\ U_2$ $\quad U_4' = R_1\bullet U_4 = (1\bullet rr\bullet r)\bullet(1\bullet ss\bullet s)\ U_1$

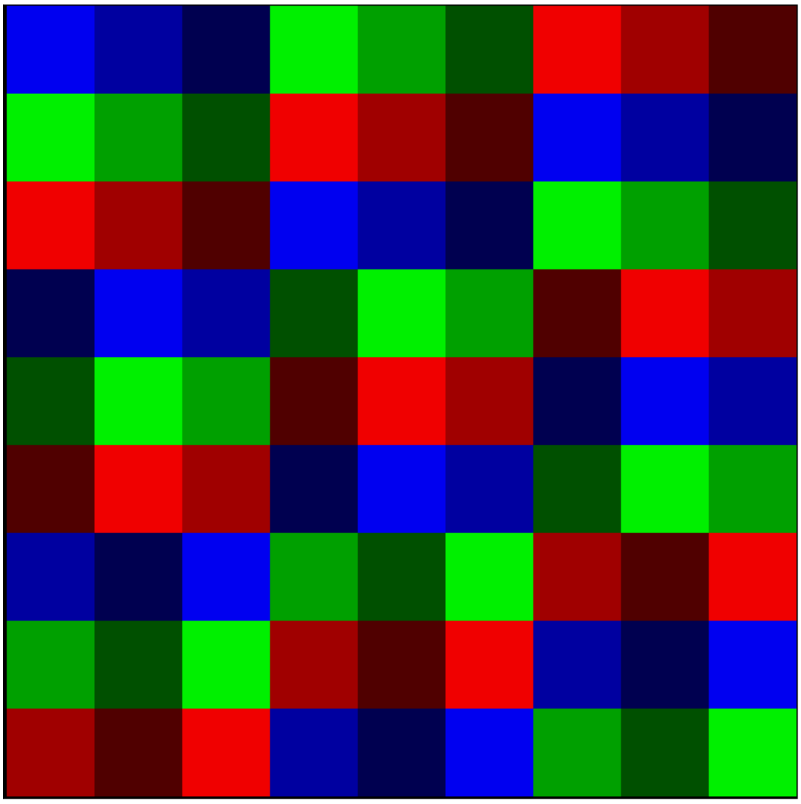


Abb.2. . Ornament U1

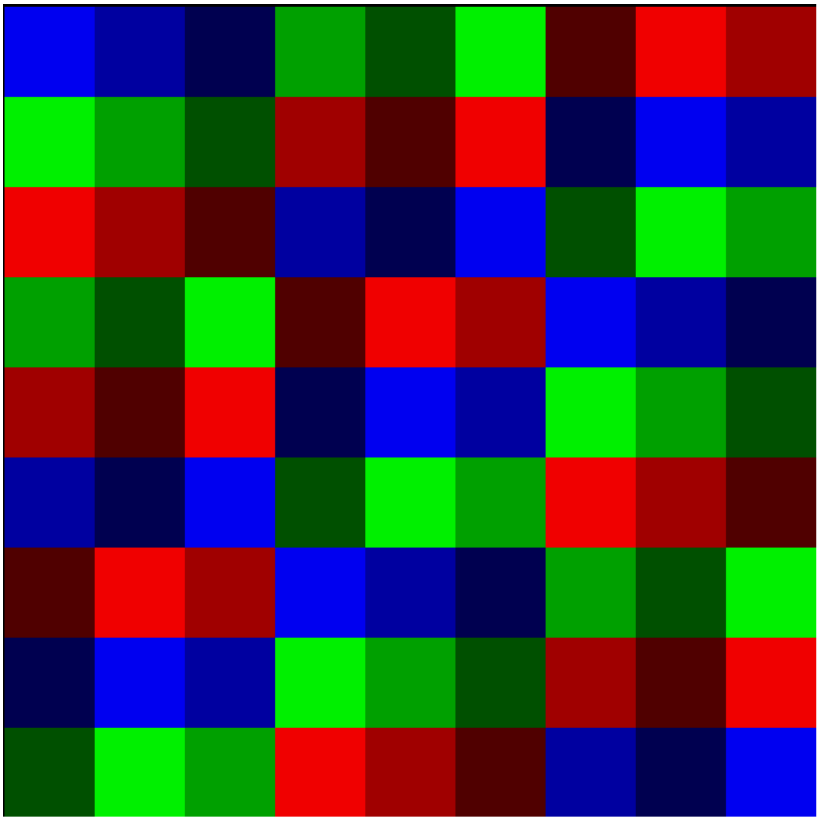


Abb.3. Ornament U1’

(3)Die im Skript [9] angegebenen Sudokus $U_1^*=1\bullet rr\bullet r\ U_1$,$U_2^*=1\bullet r\bullet rr\ U_2$,U3, $U_3^*=1\bullet r\ \bullet rr\ U_3$, $U_4^*=1\bullet rr\bullet r\ U_4$. Sie haben einen reduzierten Fixoperator α und gehören zu einer Palette von $4\bullet 9=36$ lokal typischer Superfixe mit einem reduzierten Operator α.
(4) Die im Skript [9] angegebenen Sudokus $U_1^{**}=1\bullet s\bullet ss\ U_1$, $U_2^{**}=1\bullet ss\bullet s\ U_2$, $U_3^{**}=1\bullet s\bullet ss\ U_3$, $U_4^{**}=1\bullet ss\bullet s\ U_4$. Sie haben einen reduzierten Fixoperator β und gehören zu einer Palette von $4\bullet 9=36$ lokal typischer Superfixe mit einem reduzierten Operator β.
(5) Die Palette der vier Superfixe U_i^{***} $i\in\{1,2,3,4\}$, die den Grafiken zugrunde liegen. Sie haben einen reduzierten Operator α und einen reduzierten Operator β. Die T_{2x3} -Bahnen der U_i^{***} , $i\in\{1,2,3,4\}$ sind mengengleich zu den T_{2x3}- Bahnen der U_i , $i\in\{1,2,3,4\}$. Sie erfassen alle 5681 Superfixe. Die $4\bullet 81=324$ lokal zyklischen Sudokus zeigen sich in diesen Bahnen in folgender Form $A_i= w\bullet U_i^{***} = 1\bullet u_2\bullet u_3\bullet 1\bullet v_2\bullet v_3\bullet U_i^{***}$ mit u_2,u_3 aus $\{1,r,rr\}$ und v_2,v_3 aus $\{1,s,ss\}$ für $i\in\{1,2,3,4\}$.

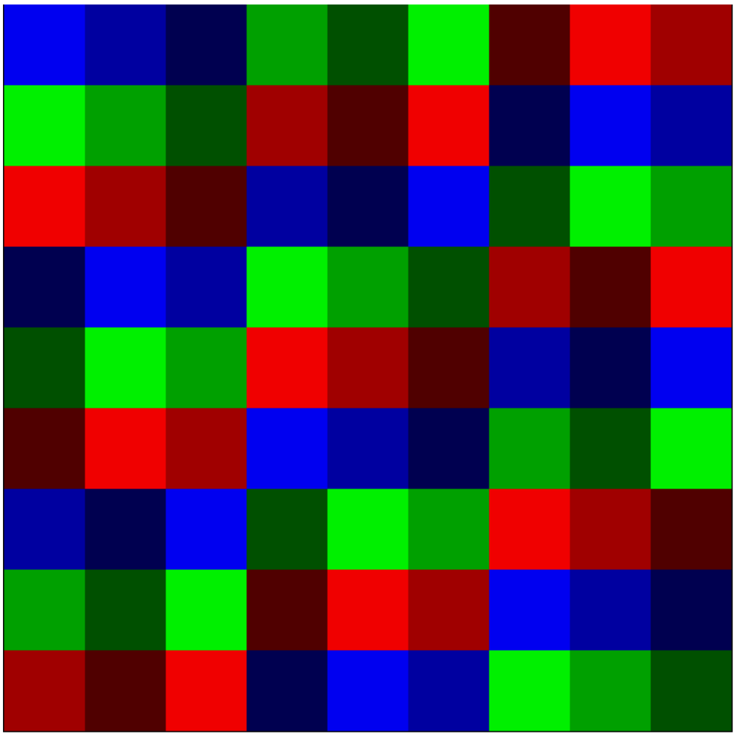


Abb.4. Ornament U1*

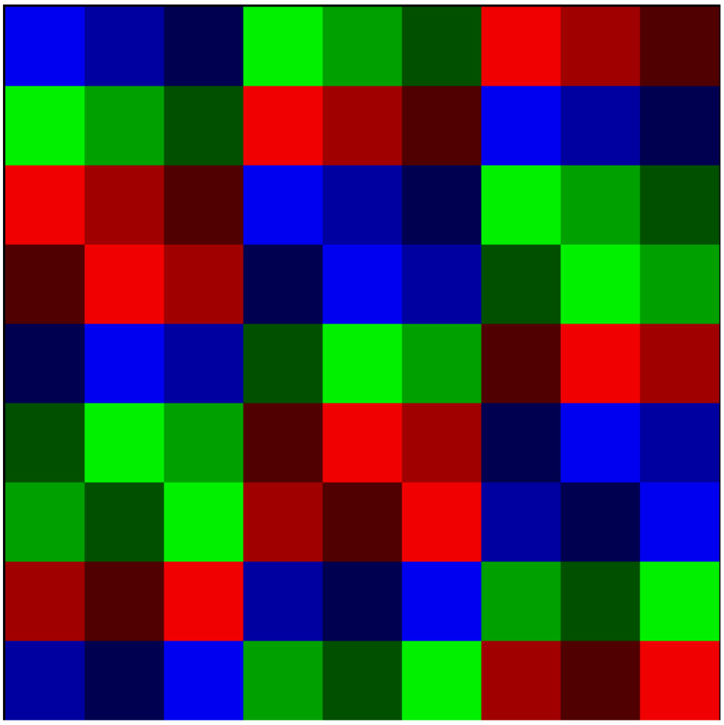


Abb.5. Ornament U1**

Halbornamente

Es gibt vier mögliche Typen von Halbornamenten. Sie hängen vom Typ der Fixpoperatoren des zugrunde liegenden normierten Sudokus ab. Die dreielementige Fixgruppe operiert transitiv auf den Blöcken der drei Blocksequenzen in der durch Fixoperatoren bestimmte Richtung, entweder in vertikaler, horizontaler hauptdiagonaler oder nebendiagonaler Richtung. Wir geben Beispiele.

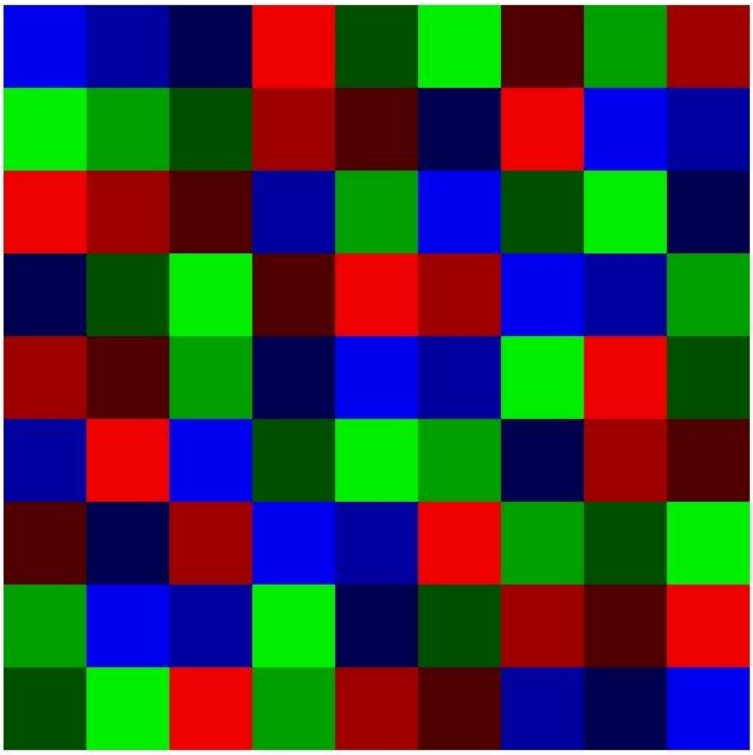


Abb6. Halbornament S_{19}*

Dem Halbornament liegt das Sudoku $S_{19}^* = 1\bullet r\bullet rr\bullet 1\bullet s\bullet ss\bullet S_{19}$ zugrunde.

$$S_{19}^* = \begin{pmatrix} e & rrssb & rsc \\ rrssc & rse & b \\ rsb & c & rrsse \end{pmatrix} \text{mit } b=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 9 & 3 & 8 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix} 8 & 9 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Das Sudoku } S_{19}=\begin{pmatrix} e & rrsb & rssc \\ rssc & e & rrsb \\ rrsb & rssc & e \end{pmatrix}$$

ist der Liste $L36_{eee}$ [3],[5] entnommen.
Fixoperator von S_{19} ist, wie für alle Sudokus dieser Liste, der globale Operator γ= RS.
Die dreielementige Fixgruppe von S_{19}* wird durch
$\gamma^* = w\bullet \gamma \bullet w^{-1}$ mit $w = 1\bullet r\bullet rr\bullet 1\bullet s\bullet ss$. erzeugt, $\gamma^* = r\bullet r\bullet r\bullet s\bullet s\bullet s\bullet RS$.
S_{19}* ist eines der 1692 normierten Sudokus aus der T_{2x3} - Bahn von S_{19} .

Anhand der 36 Sudokus der Liste $L36_{eee}$ erhält man auf diese Weise 1296.36 = 46656 normierte Sudokus vom RS-Typ und damit alle normierten Sudokus dieses Typs.

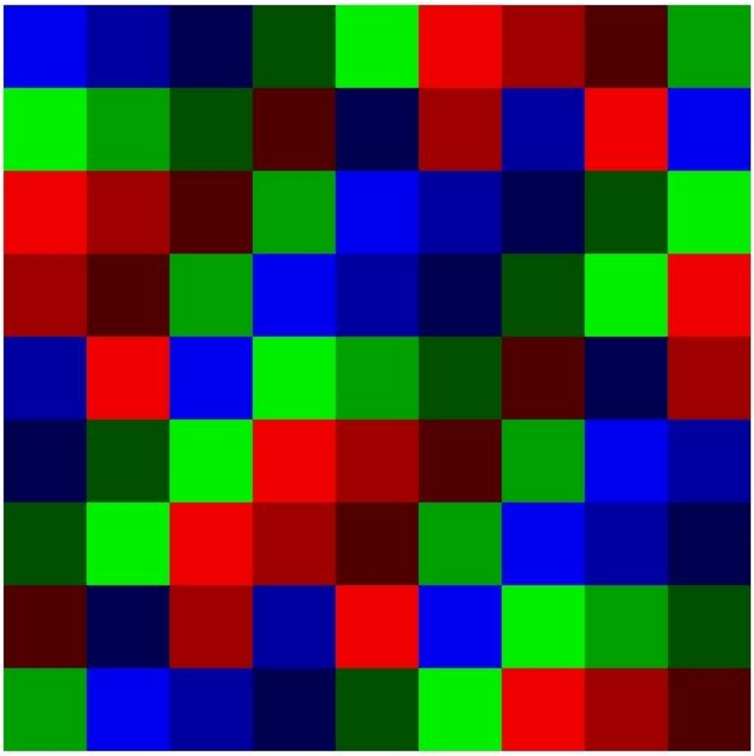


Abb7. Halbornament S'_{19}

Dem Halbornament liegt das normierte Sudoku $S'_{19} = R_1 \bullet S_{19}$ zugrunde. Es ist vom RSS-Typ und hat speziell $\gamma' = RSS$ als Fixoperator.

$$S'_{19} = R_1 \bullet S_{19} = \begin{pmatrix} e & rrsb & rssc \\ rrsb & rssc & e \\ rssc & e & rrsb \end{pmatrix}$$

In der T_{2x3} - Bahn von S'_{19} liegen 1692 konjugierte normierte Sudokus zu S'_{19} vom RSS-Typ.
An hand der 36 Sudokus $S'_i = R_1 \bullet S_i$ $i \in \{ 1,\ldots,36 \}$ - S_i aus der Liste $L36_{eee}$ - ergeben sich mit den T_{2x3} - Bahnen der S'_i alle 1296•36 = 46656 normierten Sudoku vom RSS-Typ.

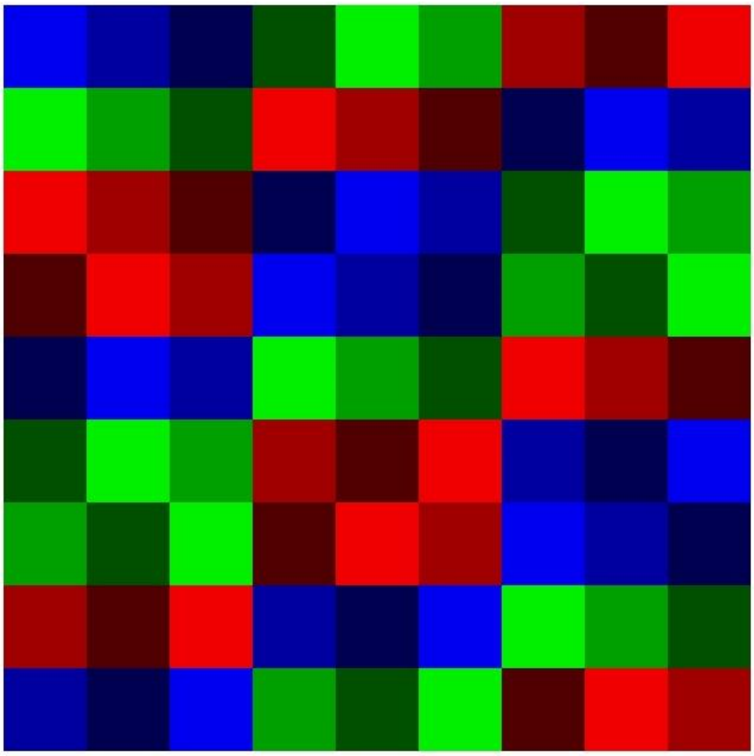


Abb8. Halbornament F_3

Dem Halbornament liegt das normierte Sudoku F_3 aus der von A. Schönhage erstellten Liste $L261_{ebc}$ zugrunde. Es hat den Fixoperator $\alpha = r\bullet r\bullet r\bullet s\bullet s\bullet s\bullet R$. Mit dem Reduktionsfaktor $u = 1\bullet rr\bullet r$ ergibt sich $F_3^* = 1\bullet rr\bullet r\bullet F_3$. Der reduzierte Fixoperator ist $\alpha^* = u\bullet\alpha\bullet u^{-1} = s\bullet s\bullet s\bullet R$. In der$T_{2x3}$ (r)-Bahn von F_3^* liegen 36 normierte Fixsudokus vom R-Typ mit gleicher Blockzeile ebc. Wie man alle normierten Blockzeilenpräsudokus und deren Fortsetzung zu Sudokus vom R-Typ findet,ist im Skript „Die Quellen der normierten Fixsudokus“ beschrieben.

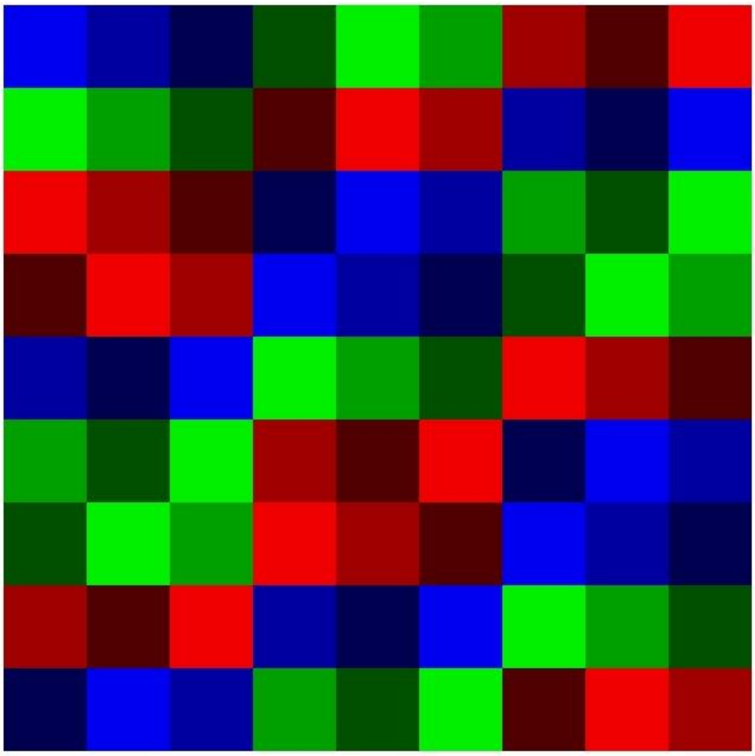


Abb9. Halbornament F_4

Dem Halbornament liegt das normierte Sudoku F_4 aus der Liste $L261_{ebc}$ [8] zugrunde. Es hat den Fixoperator β = r•r•r•s•s•s•S. Mit dem Reduktionsfaktor v = 1•ss•s ergibt sich F_4* =1•ss•s•F_4 . Der reduzierte Fixoperator ist
$\beta^* = v\bullet \beta\bullet v^{-1}$ = rr•rr•rr•S. In der T_{2x3} (s)-Bahn von F_4* liegen 36 normierte Fixsudokus vom S-Typ mit gleicher Blockspalte ebc. Wie man alle normierten Blockzeilenpräsudokus und deren Fortsetzung zu Sudokus vom S-Typ findet,ist im Skript „Die Quellen der normierten Fixsudokus“ beschrieben.

Freies Muster

Das folgende Bild zeigt ein freies Muster. Eine notwendige Bedingung für ein Halbornament ist nicht erfüllt. Im Bild gibt es keine Blockzeile oder Blockspalte oder Blockdiagonale durch den Normblock, in deren drei Blöcken die Ausprägungen der zwei Merkmale in allen Zeilen und Spalten beisammen geblieben sind. Das Bild basiert auf der normierten Form eines Sudokus, das zufällig der Rätselecke einer Zeitschrift entnommen wurde.

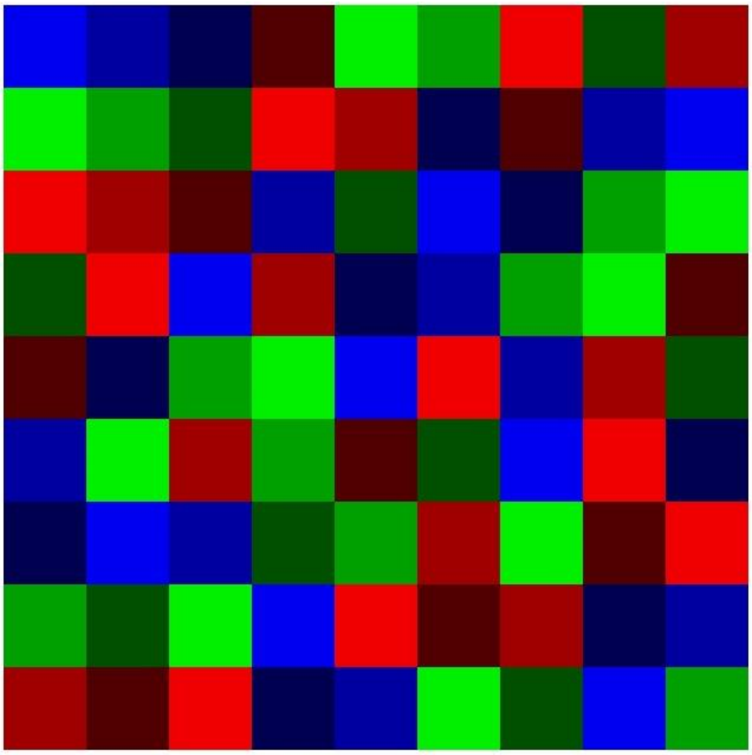


Abb10. Freies Muster

„ Chaosbild „

Es gibt - wie A. Schönhage computergestützt auf seinem Pentium 4 gezählt hat -
N_{nnS} = 5184• 3 546 146 009 967

Scheinornamente

Bilder vom Titelblatt

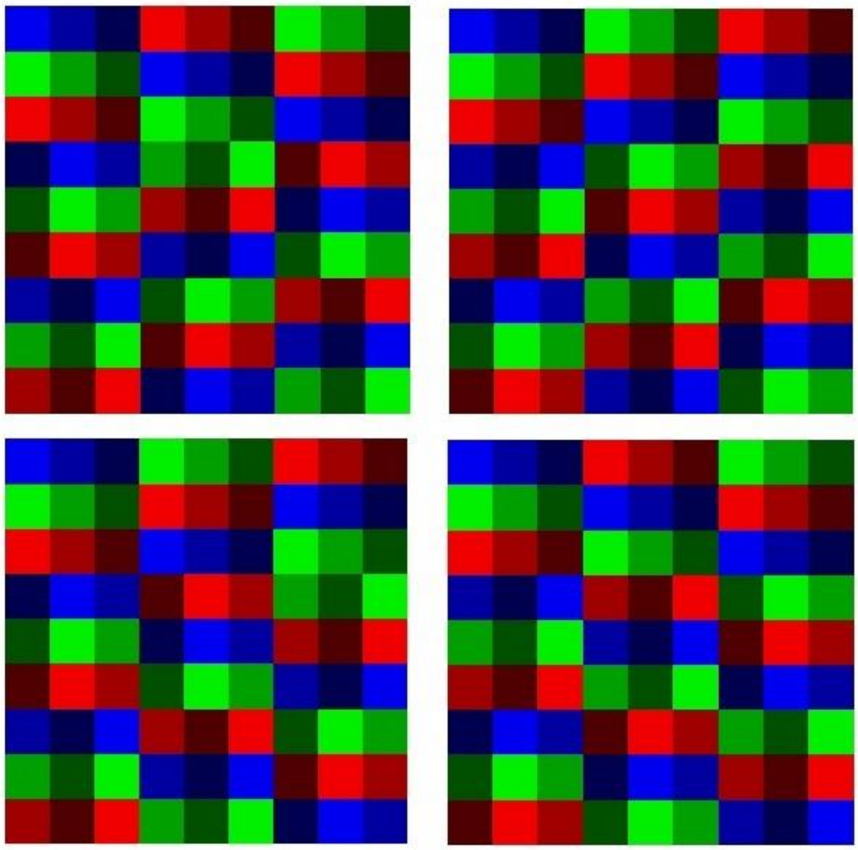


Abb11. Scheinornamente V°_1, V°_2, V°_3, V°_4

Den Scheinornamenten liegen folgende normierten Sudokus zugrunde.

$$V^\circ_1=\begin{pmatrix} e & re & rre \\ se & rrsse & rse \\ sse & rrse & rsse \end{pmatrix} \qquad V^\circ_2=\begin{pmatrix} e & rre & re \\ sse & rrse & rsse \\ se & rrsse & rse \end{pmatrix},$$ 1

$$V^\circ_3=\begin{pmatrix} e & rre & re \\ se & rse & rrsse \\ sse & rsse & rrse \end{pmatrix} \qquad V^\circ_4=\begin{pmatrix} e & re & rre \\ sse & rsse & rrse \\ se & rse & rrsse \end{pmatrix},$$

Keines dieser Sudokus ist ein Superfix. V_1°, V_3° erlauben keinen nichttrivialen Fixoperator.
Die Fixgruppe von V_2° wird von $\alpha\,(V_2^\circ)=ss\bullet s\bullet ss\bullet R$ und die Fixgruppe von V_4° wird von $\alpha\,(V_4^\circ)=ss\bullet ss\bullet s\bullet R$ erzeugt.
Für jedes der Sudokus bleiben die Ausprägungen der Merkmale in den Zeilen und Spalten eines jeden Blocks beisammen, egal welchen Block man nimmt.

Scheinornamentenzahl

Wir nennen einen Block b eines Sudokus A ähnlich zum Normblock e genau dann, wenn es Permutationen $g \in \{1,r,rr,r_1,r_2,r_3\}$ und $h \in \{1,s,ss,s_1,s_2,s_3\}$ gibt, derart, das b= ghe ist und wir sagen – eine Bezeichnung Wolfram Jehnes übernehmend – ein normiertes Sudoku hat Rang 1 genau dann, wenn alle Blöcke dem Block e ähnlich sind.
Zu dem nennen wir ein normiertes Sudoku vom Rang 1 bireduziert genau dann, wenn in der 1. Blockspalte die Blocks keine Zeilenpermutationen als Faktoren haben und die Blocks der oberen Blockzeile keine Spaltenpermutationen als Faktoren haben. Die erste Blockspalte hat also auf Grund der Sudokubedingungen notwendig eine der Formen (e,se,sse) oder (e,sse,se) und analog die obere Blockzeile eine der Formen (e,re,rre) oder (e,rre,re).

Lemma: Es gibt 64 bireduzierte normierte Sudokus vom Rang 1. Davon sind 4 superfix, 24 normalfix, 36 nicht fix.

Beweis: Für jede der Konstellationen der vorderen Spalte und der oberen Zeile -es sind bireduzierte normale Winkelfiguren vom Rang 1- gibt es , beginnend beim Mittelblock, 4•2•2•1 = 16 Möglichkeiten zur Fortsetzung zum einrangigen Sudoku. Genau eine der Möglichkeiten liefert Fortsetzungen zum normierten Superfix, 4-1=3 Möglichkeiten gibt es zur Fortsetzung zum normalen Fixsudoku vom R-Typ und analog 4-1=3 Fortsetzungen zum normalen Fixsudoku vom S-Typ. Die restlichen 16-7=9 Möglichkeiten führen zu normalen Sudokus.
Beispielsweise gibt es zum vorgegebenen Blockwinkel mit (e re rre) als oberer Zeile und (e se sse) als erster Spalte die folgenden 16 Möglichkeiten zur Auffüllung des noch offenen Viererfeldes. Die Permutationen des e-Blocks sind durch die Wahl des Mittelblocks geordnet.

$$V_1 = \begin{pmatrix} e & re & rre \\ se & rs & rrs \\ sse & rss & rrss \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} e & * & * \\ * & rs & rrss \\ * & rss & rrs \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} e & * & * \\ * & rs & rrs \\ * & rrss & rss \end{pmatrix} \quad V_4 = \begin{pmatrix} e & * & * \\ * & rs & rrss \\ * & rrss & rs \end{pmatrix}$$

$$V_5 = \begin{pmatrix} e & * & * \\ * & rss & rrs \\ * & rs & rrss \end{pmatrix} \quad V_6 = \begin{pmatrix} e & * & * \\ * & rss & rrss \\ * & rs & rrs \end{pmatrix} \quad V_7 = \begin{pmatrix} e & * & * \\ * & rss & rrs \\ * & rs & rrss \end{pmatrix} \quad V_8 = \begin{pmatrix} e & * & * \\ * & rss & rrss \\ * & rrs & rs \end{pmatrix}$$

$$V_9 = \begin{pmatrix} e & * & * \\ * & rrs & rs \\ * & rss & rrss \end{pmatrix} \quad V_{10} = \begin{pmatrix} e & * & * \\ * & rrs & rs \\ * & rrss & rss \end{pmatrix} \quad V_{11} = \begin{pmatrix} e & * & * \\ * & rrs & rss \\ * & rrss & rs \end{pmatrix} \quad V_{12} = \begin{pmatrix} e & * & * \\ * & rrs & rss \\ * & rss & rrs \end{pmatrix}$$

$$V_{13} = \begin{pmatrix} e & * & * \\ * & rrss & rs \\ * & rrs & rss \end{pmatrix} \quad V_{14} = \begin{pmatrix} e & * & * \\ * & rrss & rs \\ * & rs & rrss \end{pmatrix} \quad V_{15} = \begin{pmatrix} e & * & * \\ * & rrss & rss \\ * & rrs & rs \end{pmatrix} \quad V_{16} = \begin{pmatrix} e & * & * \\ * & rrss & rss \\ * & rrs & rs \end{pmatrix}$$

Die ersten vier Fortsetzungen liefern 1 Superfix, 1 normales Sudoku vom R-Typ, 1 vom S-Typ und 1 freies Sudoku.
Die zweiten vier Fortsetzungen liefern 2 Sudokus vom R-Typ und 2 freie Sudokus.
Die dritten vier Fortzetzungen liefern 2 Sudokus vom S-Typ und 2 freie Sudokus.

Die vierten vier Fortsetzungen liefern 4 freie Sudokus.
Erzeugende der Fixgruppen der Sudokus vom R-Typ bzw. vom S-Typ sind:

$\alpha(V_2)$= s•s•ss•R
$\beta(V_3)$ = r•r•rr•S
$\alpha(V_5)$= s•ss•s•R
$\alpha(V_6)$ = s•ss•ss•R
$\beta(V_9)$ = r•rr•r•S
$\beta(V_{10})$ = r•rr•rr•S

Fortsetzungen zum normalen Fixsudokus vom RS-Typ oder RSS-Typ erweisen sich als nicht möglich.
Die Fortsetzungen der übrigen 3 Winkel ergeben sich mittels Zeilentausch R_1, Spaltentausch S_1 oder mittels Tausch durch R_1•S_1 aus dem Beispiel.
Insgesamt erhält man aus den 4 Winkeln 4 Superfixe, 12+12=24 Einfachfixe und 36 Normalsudokus.
Speziell ergibt sich
$U_1^{***}= S_1V_1$, $U_2^{***}= R_1V_1$, $U_3^{***}= V_1$, U_4^{***} $R_1S_1V_1$
Sowie
$V_1°= V_{13}$, $V_2°= V_{11}$, $V_3°= V_2$ $V_4°= V_5$.

Zur Bestimmung der Zahl aller normierten Sudokus vom Rang 1 bedenkt man:
Zu jedem normierten Sudoku A vom Rang 1 gibt es –wie man leicht sieht- eindeutig einen Reduktionsfaktor w=u•v $\in T_{2x3} = T_{2x3}(r) \times T_{2x3}(s)$, so dass das konjugierte Sudoku A'= wA bireduziert und normiert ist. Umgekehrt erhält man zu jedem w'$\in T_{2x3}$ aus einem bireduzierten normierten Sudoku A' stets ein normiertes Sudoku A''= w'A' vom Rang 1.
Mit den T_{2x3} –Bahnen der 64 bireduzierten normierten Sudokus vom Rang 1 erhält man also alle normierten Sudokus vom Rang 1. Man hat den

Satz:

Es gibt $|T_{2x3}|$ •64=82944 normale Sudokus vom Rang 1, davon sind
1296 •4= 5184 normierte Superfixe
1296•24=31104 normierte normale Fixsudokus, jeweils zur Hälfte sind sie vom R-Typ bzw. vom S-Typ.
1296•36=46656 normierte Sudokus.
Scheinornamenten können also 1296•60= 77760 verschiedene Sudokus zu Grunde liegen.
Davon führen 46656 zu freien Mustern und 31104 zu Halbornamenten. Unter den $|T_{2x3}|$ •24 =31104 normierten normalen Fixsudokus befinden sich die Sudokus der Liste L24eee [6]. Im Skript FS von L24eee [7] sind Blockdarstellungen der 12 Fixssudokus vom R-Typ angegeben. Alle Sudokus der Liste sind normiert und vom Rang 1 und führen zu Scheinornamenten .
Beispiel:
Für das Sudoku

$$A_1=\begin{pmatrix} e & rrsse & rse \\ rsse & e & rrsse \\ rrse & rse & e \end{pmatrix}$$

vom R-Typ der Liste L24 eee ergibt sich der Zusammenhang w $A_1= R_1•S_1 •V_6$. mit w=1•rr•r•1•s•ss. In der T_{2x3} -Bahn von $R_1•S_1 •V_6$ ist damit A_1 das Bahnelement $w^{-1}• R_1•S_1 •V_6$.

Den Blockdarstellungen im Skript [7] entnimmt man analog

$$A_5 = \begin{pmatrix} e & rs\,e & rrs\,e \\ rrs\,e & e & rss\,e \\ rss\,e & rrss\,e & e \end{pmatrix} = 1•rr•r•1•s•s•V_5$$

$$A_{10}=\begin{pmatrix} e & rsse & rrsse \\ rrse & e & rse \\ rsse & rrse & e \end{pmatrix} = 1•rr•r•1•ss•ss•V_2$$

$$A_{12}=\begin{pmatrix} e & rse & rrsse \\ rrse & e & rse \\ rsse & rrsse & e \end{pmatrix} = 1•rr•r•1•s•ss• V_6$$

Erzeugende Operatoren der Fixgruppen sind

α (A_5) = rr•rr•rr•s•ss•s•R

α (A_{10}) = rr•rr•rr•s•s•ss•R

α (A_{12}) = rr•rr•rr•s•ss•ss•R

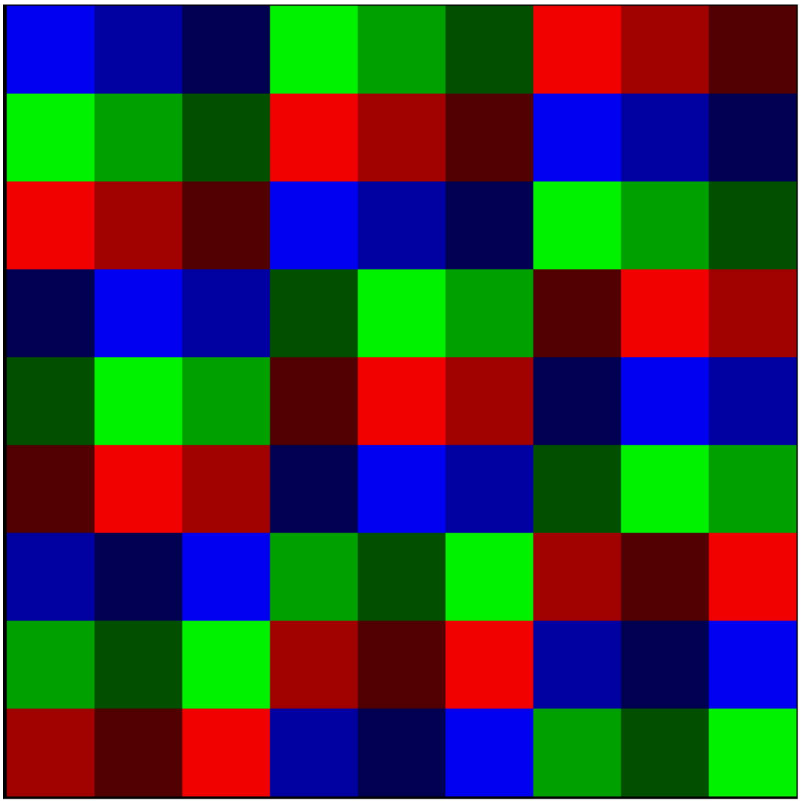


Abb.12 Scheinornament $\mathbf{A_5}$,**Fixgruppe** $<\alpha = rr\bullet rr\bullet rr\bullet s\bullet ss\bullet s\bullet R>$

Die Aussagen des Satzes lassen sich auf alle Sudokus vom Rang 1 erweitern. Ein Soduku dieser Menge ist nicht notwendig normiert, hat jedoch oben links einen zum Normblock ähnlichen Block und ist damit lokal konjugiert zu einem normierten Sudoku vom Rang 1. Die im Satz genannten Anzahlen wachsen im Bezug auf die Menge der Sudokus vom Rang 1 über e auf das jeweils 36-fache.

Skripten der Homepage   www.f-ostermann.de

[1] Die Fixsudokus der Sudokugruppe
[2] Präsudokus einer Winkelfigur
[3] Liste L36eee   von A. Schönhage
[4] Liste L4eee   von A. Schönhage
[5] Die Fixsudokus der Liste L36eee
[6] Liste L24eee   von A. Schönhage
[7] FS von L24eee
[8] Liste L261ebc von A. Schönhage
[9] Die Quellen der normierten Fixsudokus
[10] Eine mathematische Theorie von W. Jehne, Juni 2010
[Sch]Einige Sudoku-Studien, Dezember 2010
homepage   http://www.iai.uni-bonn.de/~schoe/

Hinweis: Auf meiner homepage ist ein Link zur homepage zu A. Schönhage.