Die Fixsudokus der Sudokugruppe

Fritz Ostermann , Köln , Februar/September 2010

Einleitung

Anno 2008 hat Wolfram Jehne mir als auch Arnold Schönhage ein umfangreiches Manuskript [1, Zur mathematischen Theorie der Sudokus Ein Entwurf, Köln, 2008] vorgelegt, in welchem er in Bezug auf die Menge X aller 9x9-Sudokus A die Sudokugruppe G einführte, deren Struktur bestimmte sowie Fixsudokus bezüglich dieser Gruppe betrachtete.
Ein Sudoku $A \in X$ ist ein **Fixsudoku ,** wenn es einen Operator $\varphi \neq 1$ in der Sudokugruppe G gibt, der das Sudoku A auf sich abbildet: $A \in X$ ist ein Fixsudoku $\Leftrightarrow$ Ex. $\varphi \in G$, $\varphi \neq 1$, derart, dass $\varphi(A)=A$.
Solch Operator $\varphi \in G$ als auch $1 \in G$ wird dann „Fixoperator von A" genannt.
Die Sudokugruppe G ist semidirektes Produkt $G= G_0 \otimes \{1,\tau\}$, wobei τ der „Transponierer" eines durch

3x3-Blöcke $a_{i,j}$, $i,j \in \{1,2,3\}$, notierten Sudokus $A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$, d.h. $\tau A = \begin{pmatrix} ta_{1,1} & ta_{2,1} & ta_{3,1} \\ ta_{1,2} & ta_{2,2} & ta_{3,2} \\ ta_{1,3} & ta_{2,3} & ta_{3,3} \end{pmatrix}$,

t der Transponierer von 3x3-Blöcke, und $G_0= T(r)xT(s) \otimes H^*$ ein semidirektes Produkt von T(r)xT(s) und H*=T(R)xT(S) ist. Dabei sind:
T(R) die Gruppe der Permutationen der globalen Blockzeilen, T(S) Permutationen der globalen Blockspalten,
T(r) die Gruppe der Produkte aus Permutationen der lokalen Zeilen innerhalb der Blockzeilen,
T(s) die Gruppe Produkte aus Permutationen der lokalen Spalten innerhalb der Blockspalten.
Die Faktoren von T(r) sind bzgl. der Blockzeilen von oben nach unten, die von T(s) bezüglich der Blockspalten von links nach rechts notiert, entgegen der Darstellung in [3],[5] mit 1 statt 0 beginnend.

Eine Änderung von 9x9-Sudokus A wird auch durch Permutation der die 81 Plätze von A belegenden Zeichen der Menge $\Sigma =\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ bewirkt, also durch Permutationen π der symmetrischen Gruppe S_9 . Solche Änderungen eines Sudokus A sind mit den durch die Operatoren $g \in G$ bewirkten Bewegungen von globalen Blockzeilen oder Blockzeilen sowie lokalen Zeilen oder Spalten in den Blockstreifen vertauschbar. Nach [1] bilden die so verstandenen $\pi \in S_9$ die „Zifferngruppe" Z. Studien des Zusammenwirkens der Operatoren aus G mit jenen aus Z findet man seitens Arnold Schönhage in [5, Vergleich zweier Sudokus auf Isomorphie, Bonn, April 2010].
In die obige Definition eines Fixsudokus als auch Fixoperators sind die Änderungen eines Sudokus mittels dieser insgesamt 9! Permutationen $\pi \in S_9$ alias Operatoren $\pi \in Z$ nicht einbezogen.
Jeder Fixoperator eines Sudokus A liegt nach [1],[3] bereits in der „kleinen Sudokugruppe" $G_0 \subset G$.
Demnach kann ein Fixoperator eines Sudokus A stets $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot \theta$ notiert werden, wobei $g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \in T(r)$, $h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \in T(s)$ und $\theta \in H^*=T(R)xT(S)$.

Zur Zählung von Sudokus als auch Klärung von Sachfragen hat Arnold Schönhage Computer-Programme entworfen und begleitend dazu die Manuskripte
[2, Programme zur Fortsetzung von Diagonalblöcken, Bonn,. Aug 2008]
[3, Ein Algorithmus zum Erkennen von Fixsudokus, Bonn,. Aug/Dez 2008]
geschrieben. Er bestätigte auf diesem Wege mit seinem Homecomputer (Pentium-4) die von Felgenhauer/Jarvis in [15] angegebene Zahl
$N = 9! \cdot 3^4 \cdot 2^{13} \cdot p = 6670\,903752\,021072\,936960$, $p= 27704\,267971$, aller Sudokus,
entdeckte „superfixe Sudokus, kurz „Superfixe" genannt, fand die Anzahlen
$N_f = 9! \cdot 6^4 \cdot (2^2 \cdot 97 \cdot 73 \cdot 41) = 9! \cdot 6^4 \cdot 1\,161284 = 546\,143132\,344320$ aller Fixsudokus,
$N_{sf} = 9! \cdot 6^4 \cdot 2^2 = 9! \cdot 6^4 \cdot 4 = 1881\,169920$ aller Superfixe, und zeigte , dass es zu jedem Fixsudoku A stets einen Fixoperator von einer der folgenden Arten gibt:
(1) $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot R$, R die zyklische Permutation (123) der Blockzeilen,
(2) $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot S$, S die zyklische Permutation (123) der Blockspalten,
(3) $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot R \cdot S$,
(4) $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot R \cdot S^{-1}$.
Ein „normales Fixsudoku" hat stets nur zwei Fixoperatoren $\neq 1$ und besitzt damit in seiner 3-elmentigen Fixgruppe aus dieser Palette von 4 Typen stets nur eine Sorte. Superfixe haben stets acht Fixoperatoren $\neq 1$ und besitzen in ihrer 9-elementigen Fixgruppe Fixoperatoren von jeder Sorte.

Die Darlegungen von Wolfram Jehne und Arnold Schönhage begleitend habe ich anno 2008/2009 die Skripts [6], [7a], [7b], [7c], [8] verfasst (worin σ für R und $\sigma°$ für S steht), und in §8 von [8] für Fixsudokus unter Bezug auf die von Wolfram Jehne in die Theorie eingeführten Blockschemata

Formen einer Blockoperator-Darstellung angegeben sowie, darauf aufbauend, in den Skripten [9] –[12] Wege zur Konstruktion aller Fixsudokus eines Typs anhand der Vorgabe eines ihrer Fixoperatoren $\neq 1$ aufgezeigt. Daraus ergeben sich dann die Anzahlen der Fixsudokus eines Typs, die Anzahl aller Superfixe als auch die aller Fixsudokus .

§1. Blockoperator-Darstellungen und Fixsudoku-Konstruktion

Für Fixsudokus A= $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ werden Darstellungen in Abhängigkeit vom Typ eines

Fixoperators φ von A angegeben. Zudem werden Wege zur Konstruktion eines Fixsudokus mit derartiger Darstellung beschrieben und dabei die Anzahl der sich ergebenden Fixsudokus bestimmt. Die Wege führen stets über „e-normierte“ Sudokus A, also solche, bei denen der Block links oben der

Normblock e ist, also $a_{1,1} = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Offenbar kann jedes Sudoku A anhand einer Permutation der Ziffern im Block $a_{1,1}$, also eines Elements $\pi \in Z$, in ein e-normiertes Sudoku transformiert werden.
Die Herleitungen der Darstellungsformen wurden in [8] auf dem Hintergrund der in [1] eingeführten Block-Schemata und in einer anderen als hier benutzten Notation dargestellt. In der hier benutzen Notation werden die Herleitungen im anhängenden §2 neu notiert.

Darstellungen zum R–Typ

<u>R–Form</u> Jedes $A \in X$ mit dem Fixoperator $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot R \in G_0$ erlaubt in Bezug auf $a = a_{1,1}$, $b = a_{2,2}$, $c = a_{3,3}$ folgende Darstellung

(1) $$A = \begin{pmatrix} a & g_1 \cdot g_3 \cdot (h_2)^2\, b & g_1 \cdot h_3\, c \\ g_2 \cdot h_1 a & b & g_2 \cdot g_1 \cdot (h_3)^2\, c \\ g_3 \cdot g_2 \cdot (h_1)^2\, a & g_3 \cdot h_2\, b & c \end{pmatrix}, \text{ wobei}$$

$g_3 \cdot g_2 \cdot g_1 = 1$ und $h_j \in \{s, s^{-1}\}$ für $j \in \{1,2,3\}$.

Reduzierte R–Form

Wenn $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot R \in G_0$ ein Fixoperator von $A \in X$ ist, hat das durch $w = 1 \cdot (g_1 \cdot g_3) \cdot g_1 \in T(r)$ transformierte Sudoku A’=wA den Fixoperator $\varphi' = w \cdot \varphi \cdot w^{-1} = h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot R$ mit auf id=1 reduziertem lokalen Faktor aus T(r). Das w-transformierte Sudoku A’ hat die Darstellung

(1*) $$wA = \begin{pmatrix} a & g_1 \cdot g_3 \cdot (h_2)^2\, b & g_1 \cdot h_3\, c \\ h_1 a & g_1 \cdot g_3\, b & g_1 \cdot (h_3)^2\, c \\ (h_1)^2\, a & g_1 \cdot g_3 \cdot h_2\, b & g_1 c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & (h_2)^2\, b' & h_3\, c' \\ h_1 a & b' & (h_3)^2\, c' \\ (h_1)^2\, a & h_2\, b' & c' \end{pmatrix} = A^*$$

wobei $b' = g_1 \cdot g_3 b$, $c' = g_1 c$ und $g_3 \cdot g_2 \cdot g_1 = 1$ sowie $h_1, h_2, h_3 \in \{s, s^{-1}\}$.
Ist A ein e-normiertes Sudoku, also $a_{1,1} = e$, so auch A’ =wA alias A* .

Sudoku-Konstruktion zum R-Typ

Die Konstruktion eines Fixsudokus A mit einem Fixoperator vom R-Typ gliedern wir in vier Schritte K1, K2, K3, K4. Bei deren Beschreibung wird die Vielfalt der sich jeweils ergebenden Möglichkeiten notiert. Bei der Konstruktion werden diese Schritte umgekehrt zur Reihenfolge ihrer Beschreibungen vollzogen.

K4. Ein gegebenes e-normiertes Sudoku A in R–Form wird anhand der Ziffernpermutation $\pi \in Z$ auf eine beliebige, nicht notwenig e-normierte R–Form A transformiert, das dann wie das vorgelegte e-normierte A den Fixoperator $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot R$ hat, wobei $g_3 \cdot g_2 \cdot g_1 = 1$ und $h_j \in \{s, s^{-1}\}$ für $j \in \{1,2,3\}$.
Für die Wahl der Permutation $\pi \in Z$ alias $\pi \in S_9$ gibt es 9! Möglichkeiten.

K3. Zum gegebenem e-normierten A*, das offenbar den Fixoperator $\varphi' = h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot R$ hat, wird nach Vorgabe von $g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \in T(r)$ mit $g_3 \cdot g_2 \cdot g_1 = 1$ anhand von $b' = g_1 \cdot g_3 b$, $c' = g_1 c$ ein e-normiertes Sudoku A’ gebildet und dann mittels $w^{-1} = 1 \cdot g_2 \cdot (g_3 \cdot g_2) \in T(r)$ ein e-normiertes Sudoku A= w^{-1}A’ . Ein jedes dieser Sudokus A=w^{-1}A’ hat dann $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot R$ als Fixoperator und die Transformation mit $w = 1 \cdot (g_1 \cdot g_3) \cdot g_1 \in T(r)$ führt A wieder zum e-normierten A’ alias A* zurück.

Im dritten Schritt der Konstruktion wird also die Transformation, die ein e-normiertes Sudokus A mit dem Fixoperator $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot R \in G_0$ anhand von $w = 1 \cdot (g_1 \cdot g_3) \cdot g_1$ und Umbenennung der Blöcke ins e-normierte Sudokus A* überführt, also in eine reduzierte Form mit dem Fixoperator $\varphi' = h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot R$, wobei $h_1, h_2, h_3 \in \{s, s^{-1}\}$, formal rückwärts durchlaufen. Eine ausführliche Darstellung dieses Schrittes wird im §4 beschrieben.
Bei der Wahl eines $g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \in T(r)$ mit $g_3 \cdot g_2 \cdot g_1 = 1$ gibt es 36 Möglichkeiten und damit zum vorgelegten e-normierten Sudoku A* insgesamt 36 e-normierte Sudokus $A = w^{-1}A'$ mit $wA = A'$ alias A*.

K2. Anhand einer vorgelegten e-normierten Blockzeile H(e, b',c'), die den Sudokubedingungen genügt, wird mittels Permutationen h_1, h_2, $h_3 \in \{s, s^{-1}\}$ ein e-normiertes Sudoku A* aufgebaut. Die Blöcke e, b', c' dienen dabei zur Bildung der Hauptdiagonalen in A*. Eine exemplarische Darlegung dieses zweiten Schrittes wird später im §4 beschrieben.
Bei der Wahl von $h_1, h_2, h_3 \in \{s, s^{-1}\}$ hat man $2^3 = 8$ Möglichkeiten.

K1. Zum vorgelegten Normblock e bildet man eine Blockzeile H(e,b',c'), die den Sudokubedingungen genügt.
Das Ausfüllen des Blocks b' neben dem Normblock e mit den Zeichen alias Ziffern der Menge $\Sigma = \{1,2,3,...,9\}$ zerfällt bei diesem ersten Schritt der Konstruktion in unterschiedliche Aktionen:

- **a)** In der obersten Zeile von b' neben (123) werden die Ziffern aus {4,5,6} oder aus {7,8,9} platziert. Danach werden in der mittleren Zeile von b' die aus {7,8,9} platziert, falls zuvor die Ziffern aus {4,5,6} genommen wurden, ansonsten werden die von {1,2,3} dort platziert. Schließlich werden in der untersten Zeile von b' die bislang nicht verwendeten Ziffern der zu verteilenden Menge Σ platziert.
  Bei Absehen von der Reihenfolge der Plätze in den derart gefüllten 3 Zeilen von b' gibt es für diese Aktionen $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ Möglichkeiten.
- **b)** In der obersten Zeile von b' neben (123) werden je zwei Ziffern aus {4,5,6} und eine Ziffer aus {7,8,9} oder eine Ziffer aus {4,5,6} und zwei Ziffern aus {7,8,9} platziert. Danach werden in der mittleren Zeile von b' neben der Zeile (456) von e die nicht verwendeten Ziffern aus {7,8,9} platziert und die verbliebene Lücke durch eine bzw. zwei Ziffern aus {1,2,3} ausgefüllt.
  Schließlich werden in der unteren Zeile von b' neben der Zeile (7,8,9) von e die aus der Menge Z_9 noch nicht entnommenen Ziffern platziert.
  Bei Absehen von der Reihenfolge der Plätze in den derart gefüllten 3 Zeilen von b' gibt es für diese Aktionen $(3 \cdot 3 + 3 \cdot 3) \cdot 3 \cdot 1 = 18 \cdot 3 = 54$ Möglichkeiten.

Die Fälle a) und b) ergeben bei Absehen von der Anordnung der Plätze zusammengenommen $2 + 54 = 56$ Möglichkeiten für das Platzieren der Zeichen aus Σ im Block b'.
Für das Plazieren von Zeichen aus Σ in den 3 Zeilen von Block c' gemäß den Sudokubedingungen gibt es bei Absehen von der Anordnung der Plätze in den Zeilen nur stets eine Möglichkeit.
Für die Wahl einer Reihenfolge der Plätze in den Blöcken b', c' mit insgesamt 6 Zeilen gibt es $(3!)^6 = 6^6 = 46656$ Möglichkeiten.
Zusammengenommen gibt es also $n_{FJ} = 56 \cdot 6^6$ Blockzeilen H(e,b',c'), die den Sudokubedingungen genügen. Es ist eine bekannte, von Felgenhauer/Jarvis in [15] bestimmte Zahl.
Im ersten Schritt der Konstruktion eines Fixsudokus vom R-Typ hat man also
$n_{FJ} = 56 \cdot 6^6 = 2^3 \cdot 7 \cdot 6^6 = 2\,612\,736$ Möglichkeiten zur Erstellung einer Blockzeile H(e, b',c').

Anhand der Wahlmöglichkeiten bei den Schritten K1,K2,K3,K4 ergeben sich folgende
Fixsudoku-Anzahlen zum R–Typ
$n_{e,f1} = 2^3 \cdot n_{FJ} = 2^6 \cdot 6^6 \cdot 7 = 20\,901888$ e-normierte reduzierte Sudokus A* vom R–Typ,
$N_{e,f1} = 36 \cdot n_{e,f1} = 2^6 \cdot 6^8 \cdot 7 = 752\,467968$ e-normierte Sudokus A vom R–Typ,
$n_{f1} = 9! \cdot 2^3 \cdot 56 \cdot 6^6 = 9! \cdot 2^6 \cdot 6^6 \cdot 7 = 9! \cdot 20\,901888$ reduzierte Sudokus A* vom R–Typ,
$N_{f1} = 9! \cdot 36 \cdot n_{e,f1} = 9! \cdot 2^6 \cdot 6^8 \cdot 7 = 9! \cdot 752\,467968$ Sudokus A vom R–Typ .
Der schrittweise Aufbau eines Sudokus A in R–Form liefert zudem als
R–Korollar: Zu jedem der $36 \cdot 2^3$ Operatoren $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot R \in G_0$, wobei $g_3 \cdot g_2 \cdot g_1 = 1$ sowie $h_1, h_2, h_3 \in \{s, s^{-1}\}$, gibt es $9! \cdot n_{FJ} = 9! \cdot 56 \cdot 6^6$ Sudokus A, die φ als Fixoperator haben.

Darstellungen zum S–Typ
S–Form Jedes $A \in X$ mit dem Fixoperator $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot S \in G_0$ erlaubt in Bezug auf $a = a_{1,1}$, $b = a_{2,2}$, $c = a_{3,3}$ folgende Darstellung

(2) $A = \begin{pmatrix} a & g_1 \cdot h_2\, a & (g_1)^2 \cdot h_3 \cdot h_2\, a \\ (g_2)^2 \cdot h_1 \cdot h_3\, b & b & g_2 \cdot h_3\, b \\ g_3 \cdot h_1 c & (g_3)^2 \cdot h_2 \cdot h_1 c & c \end{pmatrix}$, wobei

$g_i \in \{r, r^{-1}\}$ für $i \in \{1,2,3\}$ und $h_3 \cdot h_2 \cdot h_1 = 1$.

Reduzierte S–Form

Wenn $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot S \in G_0$ ein Fixoperator von $A \in X$ ist, hat das durch $w = 1 \cdot (h_1 \cdot h_3) \cdot h_1 \in T(s)$ transformierte Sudoku A'=wA den Fixoperator $\varphi' = w \cdot \varphi \cdot w^{-1} = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot S$ mit auf id=1 reduziertem lokalen Faktor aus T(s). Das w-transformierte Sudoku A' hat die Darstellung

(2*) $wA = \begin{pmatrix} a & g_1 a & (g_1)^2 a \\ (g_2)^2 \cdot h_1 \cdot h_3\, b & h_1 \cdot h_3 b & g_2 \cdot h_1 \cdot h_3\, b \\ g_3 \cdot h_1 c & (g_3)^2 \cdot h_1 c & h_1 c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & g_1 a & (g_1)^2 a \\ (g_2)^2\, b' & b' & g_2\, b' \\ g_3 c' & (g_3)^2\, c' & c' \end{pmatrix} = A^*$,

wobei $b' = h_1 \cdot h_3 b$, $c' = h_1 c$ und $g_i \in \{r, r^{-1}\}$ für $i \in \{1,2,3\}$ sowie $h_3 \cdot h_2 \cdot h_1 = 1$.
Ist A ein e-normiertes Sudoku, also $a_{1,1} = e$, so auch A' =wA alias A* .

Die Darstellungen zum S–Typ kann man als transponierte, also durch Tausch von Zeilen gegen Spalten inklusive der Operator-Notationen bewirkte Bilder jener vom R–Typ ansehen.
Aus dieser Sicht ergibt sich für Fixsudokus vom S–Typ eine Konstruktion in vier Schritte K1,K2,K3,K4 wie für den R–Typ und damit entsprechend gleiche Anzahlen. Ausführlich dargestellt ergibt sich:
.

Sudoku-Konstruktion zum S–Typ

K4. Ein gegebenes e-normiertes Sudoku A in S–Form wird anhand der Ziffernpermutation $\pi \in Z$ auf eine beliebige, nicht notwenig e-normierte S–Form A transformiert, das dann wie das vorgelegte e-normierte A den Fixoperator $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot S$ hat, wobei $h_3 \cdot h_2 \cdot h_1 = 1$ und $g_j \in \{r, r^{-1}\}$ für $j \in \{1,2,3\}$.
Für die Wahl der Permutation $\pi \in Z$ alias $\pi \in S_9$ gibt es 9! Möglichkeiten.

K3. Zum gegebenem e-normierten A*, das offenbar den Fixoperator $\varphi' = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot S$ hat, wird nach Vorgabe von $h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \in T(s)$ mit $h_3 \cdot h_2 \cdot h_1 = 1$ anhand von $b' = h_1 \cdot h_3 b$, $c' = h_1 c$ ein e-normiertes Sudoku A' gebildet und dann mittels $w^{-1} = 1 \cdot h_2 \cdot (h_3 \cdot h_2) \in T(s)$ ein e-normiertes Sudoku $A = w^{-1}A'$. Ein jedes dieser Sudokus $A = w^{-1}A'$ hat dann $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot S$ als Fixoperator und die Transformation mit $w = 1 \cdot (h_1 \cdot h_3) \cdot h_1 \in T(s)$ führt A wieder zum e-normierten A' alias A* zurück.
Bei der Wahl eines $h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \in T(s)$ mit $h_3 \cdot h_2 \cdot h_1 = 1$ gibt es 36 Möglichkeiten und damit zum vorgelegten Sudoku e-normierten A* insgesamt 36 e-normierte Sudokus $A = w^{-1}A'$ mit wA=A' alias A*.

K2. Anhand einer vorgelegten e-normierten Blockspalte $V\begin{pmatrix} e \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, die den Sudokubedingungen genügt,

wird mittels Permutationen $g_1, g_2, g_3 \in \{r, r^{-1}\}$ ein e-normiertes Sudoku A* gebildet.
Bei der Wahl von $g_1, g_2, g_3 \in \{r, r^{-1}\}$ hat man $2^3 = 8$ Möglichkeiten.

K1. Zum vorgelegten Normblock e konstruiert man eine e-normierte Blockspalte $V\begin{pmatrix} e \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, die den

Sudokubedingungen genügt.
Das Ausfüllen der Blöcke b' ,c' unter dem Normblock e mit den ins Sudoku eingetragenen Zeichen der Menge $\Sigma = \{1,2,3,...,9\}$ geschieht analog zur Konstruktion einer e-normierten Blockzeile H(e,b',c') und zerfällt wie dort in die entsprechenden unterschiedlichen Aktionen. Auf diese Weise ergeben sich hier

$n_{FJ} = 56 \cdot 6^6 = 2^3 \cdot 7 \cdot 6^6$ Blockspalten $V\begin{pmatrix} e \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, die den Sudokubedingungen genügen.

Im ersten Schritt der Konstruktion eines Fixsudokus vom S-Typ hat man also
$n_{FJ} = 56 \cdot 6^6 = 2\,612\,736$ Möglichkeiten zur Erstellung solch einer e-normierten Blockspalte V.

Fixsudoku-Anzahlen zum S–Typ

$n_{e,f2} = 2^3 \cdot n_{FJ} \quad = 2^6 \cdot 6^6 \cdot 7 \quad = \; 20\,901888$ e-normierte reduzierte Sudokus A* vom S–Typ,
$N_{e,f2} = 36 \cdot n_{e,f2} \quad = 2^6 \cdot 6^8 \cdot 7 \quad = 752\,467968$ e-normierte Sudokus A vom S–Typ,

$n_{f2} = 9!\cdot 2^3 \cdot 56 \cdot 6^6 = 9! \cdot 2^6 \cdot 6^6 \cdot 7 = 9! \cdot 20\,901888$ reduzierte Sudokus A* vom S–Typ,
$N_{f2} = 9! \cdot 36 \cdot n_{e,f2} = 9!\cdot 2^6 \cdot 6^8 \cdot 7 = 9! \cdot 752\,467968$ Sudokus A vom S–Typ .
Der schrittweise Aufbau eines Sudokus A in S–Form liefert zudem als
S–Korollar: Zu jedem der $36\cdot 2^3$ Operatoren $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3\cdot S \in G_0$, wobei $g_1,g_2,g_3\in\{r,r^{-1}\}$, sowie $h_3\cdot h_2\cdot h_1=1$ gibt es $9!\cdot n_{FJ} = 9!\cdot 56\cdot 6^6$ Sudokus A, die φ als Fixoperator haben.

Darstellungen zum RS–Typ

<u>RS–Form</u> Jedes $A\in X$ mit dem Fixoperator $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3\cdot R\cdot S \in G_0$ erlaubt in Bezug auf $a = a_{1,1}$, $b = a_{3,2}$, $c = a_{2,3}$ folgende Darstellung

(3) $$A = \begin{pmatrix} a & g_1\cdot g_3\cdot h_2\cdot h_1 c & g_1\cdot h_3 b \\ g_2\cdot g_1\cdot h_1\cdot h_3 b & g_2\cdot h_2 a & c \\ g_3\cdot h_1 c & b & g_3\cdot g_2\cdot h_3\cdot h_2 a \end{pmatrix}, \text{ wobei}$$

$g_3\cdot g_2\cdot g_1 = 1$ und $h_3\cdot h_2\cdot h_1=1$.

Reduzierte RS–Form

Wenn $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3\cdot R\cdot S\in G_0$ ein Fixoperator von $A\in X$ ist, hat das durch $w= 1\cdot(g_1\cdot g_3)\cdot g_1\cdot 1\cdot(h_1\cdot h_3)\cdot h_1\in T(r)xT(s)$ transformierte Sudoku $A'=wA$ den rein globalen Fixoperator $\varphi'=w\cdot\varphi\cdot w^{-1} = R\cdot S$. Alle lokalen Faktoren von φ sind auf id=1 reduziert. Das w-transformierte Sudoku A' hat die Darstellung

(3*) $$wA = \begin{pmatrix} a & g_1\cdot g_3\cdot h_1 c & g_1\cdot h_1\cdot h_3 b \\ g_1\cdot h_1\cdot h_3 b & a & g_1\cdot g_3\cdot h_1 c \\ g_1\cdot g_3\cdot h_1 c & g_1\cdot h_1\cdot h_3 b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c' & b' \\ b' & a & c' \\ c' & b' & a \end{pmatrix} = A^*,$$

wobei $b'=g_1\cdot h_1\cdot h_3 b$, $c'= g_1\cdot g_3\cdot h_1\, c$ und $g_3\cdot g_2\cdot g_1=1$ sowie $h_3\cdot h_2\cdot h_1=1$.
Ist A ein e-normiertes Sudoku, so hat das transformierte Sudoku A'=wA alias A* eine e-normierte reduzierte RS–Form und offenbar den Fixoperator $\varphi' = R\cdot S$.

Auf einer e-normierten Winkelfigur $W^*_{e,3} = \begin{pmatrix} e & c' & b' \\ b' & & \\ c' & & \end{pmatrix}$ liegen nach [9] alias [L7] insgesamt $n_{AS} = 40$ Praesudokus, d.h. Ziffernbelegungen, die den Sudokubedingungen genügen. Jedes dieser 40 Praesudokus $W^*_{e,3}$ lässt sich, wie man leicht sieht, in genau einer Weise zum e-normierten Sudoku

$A^* = \begin{pmatrix} e & c' & b' \\ b' & e & c' \\ c' & b' & e \end{pmatrix}$, also einem Sudoku in reduzierter RS–Form fortsetzen.

Die e-normierten Superfixe U_1, U_2, U_3, U_4

Die 40 e-normierten Sudokus A* in reduzierter RS–Form gliedern sich in 36 normale Fixsudokus und 4 superfixe Sudokus in reduzierter Form, die also alle $\varphi' = R\cdot S$ als Fixoperator haben.
Die 4 Superfixe sind Ende Dez 2008 im Nachtrag zu [2], kurz $Liste4_{eee}$ genannt, angegeben, die 36 normalen Fixsudokus in einer von Arnold Schönhage am 9.Nov 2009 erstellten Liste $L36_{eee}$.
Bei Einschränkung lokaler Operatoren von G_0 auf Blöcke kann man die von Arnold Schönhage gefundenen e-normierten „Superfixe" in folgender Blockoperatordarstellung notieren:

$$U_1 = \begin{pmatrix} e & r^{-1}\cdot s^{-1}e & r\cdot se \\ r\cdot se & e & r^{-1}\cdot s^{-1}e \\ r^{-1}\cdot s^{-1}e & r\cdot se & e \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} e & r\cdot se & r^{-1}\cdot s^{-1}e \\ r^{-1}\cdot s^{-1}e & e & r\cdot se \\ r\cdot se & r^{-1}\cdot s^{-1}e & e \end{pmatrix},$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} e & r\cdot s^{-1}e & r^{-1}\cdot se \\ r^{-1}\cdot se & e & r\cdot s^{-1}e \\ r\cdot s^{-1}e & r^{-1}\cdot se & e \end{pmatrix}, \quad U_4 = \begin{pmatrix} e & r^{-1}\cdot se & r\cdot s^{-1}e \\ r\cdot s^{-1}e & e & r^{-1}\cdot se \\ r^{-1}\cdot se & r\cdot s^{-1}e & e \end{pmatrix}.$$

Beachtenswert ist die durch lokale Operatoren beschriebene Abhängigkeit aller Blöcke vom Block e.
Zwischen den vier Superfixen gibt es folgende Abhängigkeiten:
$U_2 = R_1\cdot S_1(U_1)$, $U_3 = 1\cdot r\cdot r^{-1}\cdot 1\cdot s\cdot s^{-1}\cdot S_1(U_1)$, $U_4 = R_1\cdot S_1(U_3) = 1\cdot r^{-1}\cdot r\cdot 1\cdot s^{-1}\cdot s\cdot R_1(U_1)$. Daraus ergibt sich beispielsweise $U_2 = R_1\cdot S_1(U_1) = R_1\cdot S_1\cdot S_1\cdot 1\cdot r^{-1}\cdot r\cdot 1\cdot s^{-1}\cdot s(U_3) = R_1\cdot 1\cdot r^{-1}\cdot r\cdot 1\cdot s^{-1}\cdot s(U_3)$.
Die Fixgruppen dieser Superfixe, darin kurz $\mathbf{r} = r\cdot r\cdot r\in T(r)$, $\mathbf{s} = s\cdot s\cdot s\in T(s)$ notiert, sind

$F_{Go}(U_1) = \{1, R\cdot S, R^{-1}\cdot S^{-1}, \ \mathbf{r\cdot s\cdot}R, \ \mathbf{r\cdot s}\cdot S^{-1}, \ \mathbf{r\cdot s}\cdot R^{-1}\cdot S, \ \mathbf{r^{-1}\cdot s^{-1}}\cdot S^{-1}, \ \mathbf{r^{-1}\cdot s^{-1}}\cdot S, \mathbf{r^{-1}\cdot s^{-1}}\cdot R\cdot S^{-1}\}.$
$F_{Go}(U_2) = \{1, R\cdot S, R^{-1}\cdot S^{-1}, \mathbf{r^{-1}\cdot s^{-1}\cdot}R, \mathbf{r^{-1}\cdot s^{-1}}\cdot S^{-1}, \mathbf{r^{-1}\cdot s^{-1}}\cdot R^{-1}\cdot S, \mathbf{r\cdot s}\cdot S^{-1}, \mathbf{r\cdot s}\cdot S, \mathbf{r\cdot s}\cdot R\cdot S^{-1}\}.$
$F_{Go}(U_3) = \{1, R\cdot S, R^{-1}\cdot S^{-1}, \mathbf{r^{-1}\cdot s\cdot}R, \mathbf{r^{-1}\cdot s}\cdot S^{-1}, \mathbf{r^{-1}\cdot s}\cdot R^{-1}\cdot S, \ \mathbf{r\cdot s^{-1}}\cdot S^{-1}, \mathbf{r\cdot s^{-1}}\cdot S, \mathbf{r\cdot s^{-1}}\cdot R\cdot S^{-1}\}$
$F_{Go}(U_4) = \{1, R\cdot S, R^{-1}\cdot S^{-1}, \mathbf{r\cdot s^{-1}\cdot}R, \mathbf{r\cdot s^{-1}}\cdot S^{-1}, \mathbf{r\cdot s^{-1}}\cdot R^{-1}\cdot S, \ \mathbf{r^{-1}\cdot s}\cdot S^{-1}, \ \mathbf{r^{-1}\cdot s}\cdot S, \mathbf{r^{-1}\cdot s}\cdot R\cdot S^{-1}\}$
Jede der vier Fixgruppen enthält einen Fixoperator vom R–Typ sowie vom S–Typ . Die Superfixe U_1, U_2, U_3, U_4 kann man demnach –wie in [7b] gezeigt- auch in R–Form oder S–Form darstellen. Zufolge der lokalen Faktoren im betreffenden Fixoperator sind es keine Darstellungen in reduzierter Form.

Zur Konstruktion eines Fixsudokus A mit einem Fixoperator vom RS-Typ wird hier nun, analog zur Konstruktion von Sudokus der R–Form oder S–Form, aus einem mittels einer Vertikalen von [L7] gebildeten e-normierten Sudoku $A^* = \begin{pmatrix} e & c' & b' \\ b' & e & c' \\ c' & b' & e \end{pmatrix}$ in reduzierter RS–Form ein Fixsudoku A in allgemeiner RS–Form erstellt. Das vorgelegte Sudoku A* ist dabei stets eines der 40 Sudokus der Listen $L36_{eee}$ oder $L4_{eee}$. Deren Winkelfigur $W^*_{e,3}$ findet man in [L7] alias Liste L80e vom 6.Feb 2010 durch ihre vertikalen e-normierten Blockspalten notiert.
Im Vergleich zur Konstruktion von Sudokus der R–Form oder S–Form genügen Analogien zu den dort beschriebenen letzten zwei Schritten:
K3. Zum gegebenem e-normierten A*, das offenbar den Fixoperator $\varphi' = R\cdot S$ hat, wird nach Vorgabe von $g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3 \in T(r)xT(s)$, wobei $g_3\cdot g_2\cdot g_1=1$ und $h_3\cdot h_2\cdot h_1=1$, anhand von $b'=g_1\cdot h_1\cdot h_3 b$, $c'= g_1\cdot g_3\cdot h_1 c$ ein e-normiertes Sudoku A' gebildet und dann mittels $w^{-1} = 1\cdot g_2\cdot(g_3\cdot g_2)\cdot 1\cdot h_2\cdot(h_3\cdot h_2) \in T(r)xT(s)$ ein e-normiertes Sudoku $A= w^{-1}A'$.
Ein jedes dieser Sudokus $A=w^{-1}A'$ hat dann $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3\cdot R\cdot S$ als Fixoperator und die Transformation mit $w= 1\cdot(g_1\cdot g_3)\cdot g_1\cdot 1\cdot(h_1\cdot h_3)\cdot h_1 \in T(r)xT(s)$ führt A wieder zum e-normierten A' alias A* zurück.
Bei der Wahl von $g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3 \in T(r)xT(s)$, wobei $g_3\cdot g_2\cdot g_1=1$ und $h_3\cdot h_2\cdot h_1=1$, gibt es 36^2 Möglichkeiten und damit zum vorgelegten Sudoku e-normierten A* insgesamt 36^2 e-normierte Sudokus $A=w^{-1}A'$ mit $wA=A'$ alias A*.

K4. Ein gegebenes e-normiertes Sudoku A in RS–Form wird anhand einer Ziffernpermutation $\pi \in Z$ auf ein beliebiges, nicht notwenig e-normiertes A in RS–Form transformiert, das dann wie das vorgelegte e-normierte A den Fixoperator $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3\cdot R\cdot S$ hat, wobei $g_1\cdot g_2\cdot g_3=1$ und $h_3\cdot h_2\cdot h_1=1$.
Für die Wahl der Permutation $\pi \in Z$ alias $\pi \in S_9$ gibt es 9! Möglichkeiten.

Die Wahlmöglichkeiten für die Ausgangslage und bei den Schritten K3,K4 liefern folgende
Fixsudoku-Anzahlen zum RS–Typ
$n_{e,f3}$ = 40 e-normierte reduzierte Sudokus A* vom RS–Typ,
$N_{e,f3} = 36^2 \cdot n_{e,f3} = 36^2 \cdot 40 = 51840$ e-normierte Sudokus A vom RS–Typ,
$n_{f3} = 9! \cdot n_{e,f3} = 9! \cdot 40$ reduzierte Sudokus A* vom RS–Typ,
$N_{f3} = 9! \cdot 36^2 \cdot n_{e,f3} = 9! \cdot 36^2 \cdot 40$ Sudokus A vom RS–Typ .
Der schrittweise Aufbau eines Sudokus A in RS–Form liefert zudem als
RS–Korollar: Zu jedem der 36^2 Operatoren $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3\cdot R\cdot S \in G_0$, wobei $g_1,g_2,g_3=1$ und $h_3\cdot h_2\cdot h_1=1$, gibt es $9!\cdot n_{AS} = 9! \cdot 40$ Sudokus A, die φ als Fixoperator haben.

RSS–Typ Jedes $A \in X$ mit dem Fixoperator $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3\cdot R\cdot S^{-1} \in G_0$ erlaubt in Bezug auf $a = a_{1,1}$, $c = a_{2,2}$, $b = a_{3,3}$ folgende Darstellung

(4) $$A = \begin{pmatrix} a & g_1\cdot h_2\, b & g_1\cdot g_3\cdot h_3\cdot h_1\, c \\ g_2\cdot g_1\cdot h_1\cdot h_2\, b & c & g_2\cdot h_3\, a \\ g_3\cdot h_1 c & g_3\cdot g_2\cdot h_2\cdot h_3\, a & b \end{pmatrix},$$

wobei $g_3\cdot g_2\cdot g_1=1$ und $h_1\cdot h_2\cdot h_3=1$.
Alle vier e-normierten Superfixe U_1, U_2, U_3, U_4 haben einen Fixoperator vom RSS–Typ, lassen sich somit in dieser Form darstellen.

Reduzierte RSS–Form
Wenn $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3\cdot R\cdot S^{-1} \in G_0$ ein Fixoperator von $A \in X$ ist, hat das durch

$w = 1\cdot(g_1\cdot g_3)\cdot g_1 \cdot 1\cdot h_1\cdot(h_1\cdot h_2) \in T(r)xT(s)$ transformierte Sudoku A'=wA den rein globalen Fixoperator $\varphi' = w\cdot\varphi\cdot w^{-1} = R\cdot S^{-1}$. Alle lokalen Faktoren von φ sind auf id=1 reduziert.
Das w-transformierte Sudoku A' hat die Darstellung

(4*) $$wA=\begin{pmatrix} a & g_1\cdot h_1\cdot h_2 b & g_1\cdot g_3\cdot h_1 c \\ g_1\cdot h_1\cdot h_2 b & g_1\cdot g_3\cdot h_1 c & a \\ g_1\cdot g_3\cdot h_1 c & a & g_1\cdot h_1\cdot h_2 b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b' & c' \\ b' & c' & a \\ c' & a & b' \end{pmatrix} = A^*,$$

wobei $b' = g_1\cdot h_1\cdot h_2\, b$, $c' = g_1\cdot g_3\cdot h_1\, c$ und $g_3\cdot g_2\cdot g_1 = 1$ und $h_1\cdot h_2\cdot h_3 = 1$.
Ist A ein e-normiertes Sudoku, so hat das transformierte Sudoku A'=wA alias A* eine e-normierte reduzierte RSS–Form und weiterhin den Fixoperator $\varphi' = R\cdot S^{-1}$.

Auf der e-normierten Winkelfigur $W^*_{e,4} = \begin{pmatrix} e & b' & c' \\ b' & & \\ c' & & \end{pmatrix}$ liegen nach [4] , der von Arnold Schönhage am 7.Februar 2010 verfassten „Kleinen Studie zum 84. Geburtstag von W.Jehne“, insgesamt $n_{FO} = 40$ Praesudokus, d.h. Zifferbelegungen, die den Sudokubedingungen genügen. In [L7] alias Liste L80e der genormten Vertikalen von Winkel-Praesudokus vom 6.Feb 2010 sind sie wie jene der Winkelfigur $W^*_{e,3}$ durch ihre vertikalen e-normierten Blockspalten notiert. Jedes dieser Teilsudokus lässt sich in genau einer Weise zum Sudoku $A^* = \begin{pmatrix} e & b' & c' \\ b' & c' & e \\ c' & e & b' \end{pmatrix}$, also einem Sudoku in RSS–Form fortsetzen.

Analog zur Konstruktion von Sudokus der RS–Form wird aus einem vorgelegten Sudoku
$A^* = \begin{pmatrix} e & b' & c' \\ b' & c' & e \\ c' & e & b' \end{pmatrix}$ in reduzierter RSS–Form, es ist stets eines der 40 Sudokus, die sich durch Transformation mittels des globalen Operators $R_1 \in G_0$ (oder $S_1 \in G_0$) aus jenen der Listen $L36_{eee}$ oder $L4_{eee}$ ergeben, ein Sudoku A in RSS–Form erstellt. In Analogie zur Konstruktion von Sudokus A der RS–Form genügen die zwei Schritte:
K3. Zum gegebenem e-normierten A*, das offenbar den Fixoperator $\varphi' = R\cdot S^{-1}$ hat, wird nach Vorgabe von $g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3 \in T(r)xT(s)$, wobei $g_3\cdot g_2\cdot g_1 = 1$ und $h_1\cdot h_2\cdot h_3 = 1$, anhand von $b' = g_1\cdot h_1\cdot h_2\, b$, $c' = g_1\cdot g_3\cdot h_1\, c$ ein e-normiertes Sudoku A' gebildet und dann mittels $w^{-1} = 1\cdot g_2\cdot(g_3\cdot g_2)\cdot 1\cdot(h_2\cdot h_3)\cdot h_3 \in T(r)xT(s)$ ein e-normiertes Sudoku $A = w^{-1}A'$.
Ein jedes dieser Sudokus $A = w^{-1}A'$ hat dann $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3\cdot R\cdot S^{-1}$ als Fixoperator und die Transformation mit $w = 1\cdot(g_1\cdot g_3)\cdot g_1\cdot 1\cdot(h_1\cdot h_3)\cdot h_1 \in T(r)xT(s)$ führt A wieder zum e-normierten A' alias A* zurück. Eine exemplarisch begleitete ausführliche Darlegung findet man im §4.
Bei der Wahl von $g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3 \in T(r)xT(s)$, wobei $g_3\cdot g_2\cdot g_1 = 1$ und $h_1\cdot h_2\cdot h_3 = 1$, gibt es 36^2 Möglichkeiten und damit zum vorgelegten Sudoku e-normierten A* insgesamt 36^2 e-normierte Sudokus $A = w^{-1}A'$ mit wA=A' alias A*.

K4. Ein gegebenes e-normiertes Sudoku A in RSS–Form wird anhand einer Ziffernpermutation $\pi \in Z$ auf ein beliebiges, nicht notwenig e-normiertes A in RSS–Form transformiert, das dann wie das vorgelegte e-normierte A den Fixoperator $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3\cdot R\cdot S^{-1}$, wobei $g_3\cdot g_2\cdot g_1 = 1$ und $h_1\cdot h_2\cdot h_3 = 1$, hat. Für die Wahl der Permutation $\pi \in Z$ alias $\pi \in S_9$ gibt es 9! Möglichkeiten.

Analog zum RS–Typ liefern die Wahlmöglichkeiten für die Ausgangslage und den Schritten K3,K4 hier folgende
Fixsudoku-Anzahlen zum RSS–Typ
$n_{e,f4} = 40$ e-normierte reduzierte Sudokus A* vom RSS–Typ,
$N_{e,f4} = 36^2 \cdot n_{e,f4} = 36^2 \cdot 40 = 51840$ e-normierte Sudokus A vom RSS–Typ,
$n_{f4} = 9! \cdot n_{e,f4} = 9! \cdot 40$ reduzierte Sudokus A* vom RSS–Typ,
$N_{f4} = 9! \cdot 36^2 \cdot n_{e,f4} = 9! \cdot 51840$ Sudokus A vom RSS–Typ .
Der schrittweise Aufbau eines Sudokus A in RSS–Form liefert zudem als
RSS–Korollar: Zu jedem der 36^2 Operatoren $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3\cdot R\cdot S^{-1} \in G_0$, wobei $g_3\cdot g_2\cdot g_1 = 1$ und $h_1\cdot h_2\cdot h_3 = 1$, gibt es $9! \cdot n_{FO} = 9! \cdot 40$ Sudokus A, die φ als Fixoperator haben.

Resumee

Abhängig vom Typ seines Fixoperators $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot \theta$, wobei $\theta \in \{R, S, R \cdot S, R \cdot S^{-1}\}$ und $g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \in T(r)$, $h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \in T(s)$, gibt es für ein Fixsudoku A stets eine lokal transformierte Darstellung $A' = wA$ alias A^*, $w \in T(r)xT(s)$, in einer der folgenden reduzierten Formen:

R–Typ: $w=1\cdot(g_1\cdot g_3)\cdot g_1 \in T(r)$, $A^* = \begin{pmatrix} a & (h_2)^2 b' & h_3 c' \\ h_1 a & b' & (h_3)^2 c' \\ (h_1)^2 a & h_2 b' & c' \end{pmatrix}$, $h_j \in \{s, s^{-1}\}$ für $j \in \{1.2.3\}$,

wobei $b' = g_1 \cdot g_3 b$, $c' = g_1 c$ und $g_3 \cdot g_2 \cdot g_1 = 1$.

S–Typ : $w = 1\cdot(h_1\cdot h_3)\cdot h_1 \in T(s)$, $A^* = \begin{pmatrix} a & g_1 a & (g_1)^2 a \\ (g_2)^2 b' & b' & g_2 b' \\ g_3 c' & (g_3)^2 c' & c' \end{pmatrix}$, $g_i \in \{r, r^{-1}\}$ für $i \in \{1,2,3\}$,

wobei a, $b' = h_1 \cdot h_3 b$, $c' = h_1 c$ und $h_3 \cdot h_2 \cdot h_1 = 1$.

RS–Typ: $w = 1\cdot(g_1\cdot g_3)\cdot g_1 \cdot 1\cdot(h_1\cdot h_3)\cdot h_1 \in T(r)xT(s)$, $A^* = \begin{pmatrix} a & c' & b' \\ b' & a & c' \\ c' & b' & a \end{pmatrix}$,

wobei $b' = g_1 \cdot h_1 \cdot h_3 b$, $c' = g_1 \cdot g_3 \cdot h_1 c$ und $g_3 \cdot g_2 \cdot g_1 = 1$, $h_3 \cdot h_2 \cdot h_1 = 1$.

RSS–Typ: $w = 1\cdot(g_1\cdot g_3)\cdot g_1 \cdot 1\cdot h_1\cdot(h_1\cdot h_2) \in T(r)xT(s)$, $A^* = \begin{pmatrix} a & b' & c' \\ b' & c' & a \\ c' & a & b' \end{pmatrix}$,

wobei $b' = g_1 \cdot h_1 \cdot h_2 b$, $c' = g_1 \cdot g_3 \cdot h_1 c$ und $g_3 \cdot g_2 \cdot g_1 = 1$, $h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 = 1$.

A* vom RS–Typ hat im Raster, zyklisch ergänzt, gleiche Blöcke in Richtung der Hauptdiagonalen,
A* vom RSS–Typ hat im Raster, zyklisch ergänzt, gleiche Blöcke in Richtung der Nebendiagonalen.
Für ein Superfix A gibt es reduzierte Darstellungen in jeder der Formen, in Bezug auf den RS–Typ sind es die $n_{e,sf} = 4$ e-normierten Superfixe U_1, U_2, U_3, U_4 . Insgesamt gibt es somit
$N_{sf} = 9! \cdot 36^2 \cdot n_{e,sf} = 9! \cdot 6^4 \cdot 4 = 1881\,169920$ Superfixe .

Anzahl-Bilanz

Es gibt
$n_{f1} = 9! \cdot 20901888 = 9! \cdot 36 \cdot 580608$ Fixsudokus mit einem reduzierten Fixoperator vom R–Typ,
$n_{f2} = 9! \cdot 20901888 = 9! \cdot 36 \cdot 580608$ Fixsudokus mit einem reduzierten Fixoperator vom S–Typ,
$n_{f3} = 9! \cdot 40$ Fixsudokus mit dem Fixoperator $R \cdot S$, darunter die Superfixe U_1, U_2, U_3, U_4
$n_{f4} = 9! \cdot 40$ Fixsudokus mit dem Fixoperator $R \cdot S^{-1}$.
Jeweils die betreffende Menge dieser Fixsudokus umfassend gibt es
$N_{f1} = 36 \cdot n_{f1} = 9! \cdot 36^2 \cdot 580608$ Sudokus mit einem Fixoperator vom R–Typ,
$N_{f2} = 36 \cdot n_{f2} = 9! \cdot 36^2 \cdot 580608$ Sudokus mit einem Fixoperator vom S–Typ,
$N_{f3} = 36^2 \cdot n_{f3} = 9! \cdot 36^2 \cdot 40$ Sudokus mit einem Fixoperator vom RS–Typ,
$N_{f4} = 36^2 \cdot n_{f4} = 9! \cdot 36^2 \cdot 40$ Sudokus mit einem Fixoperator vom RSS–Typ.
In jeder dieser Mengen liegen alle $N_{sf} = 9! \cdot 6^4 \cdot n_{e,sf} = 1881\,169920$ Superfixe.
Insgesamt gibt es damit
$N_f = N_{f1} + N_{f2} + N_{f3} + N_{f4} - 3 \cdot N_{sf} = 9! \cdot 36^2 \cdot 580608 = 9! \cdot 36^2 \cdot 1\,161\,284$ Fixsudokus.

Diese für Wolfram Jehne zum 84.Geburtstag am 15.Februar 2010 im Skript [10] zusammengestellten Anzahlen und deren Zusammenhänge wurden im Jan 2010 anhand der von Arnold Schönhage erzielten computergestützten Zählergebnisse gefunden.
In den Skripten [9] –[12] sind direkte Wege zu diesen Anzahlen beschrieben.

§2. Herleitung der Fixsudoku-Formen

Die Herleitungen der Darstellungs-Formen für Sudokus mit einem Fixoperatoren $\varphi \in G_0$ der Typen R, S, RS sowie RSS verlaufen nach gleichem Muster. In Bezug auf ein Fixsudoku $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$

wird für den betreffenden Fixoperator $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot \theta \in T(r)xT(s) \otimes T(R)xT(S) = G_0$ aus dem Ansatz

$\varphi(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix})=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ nach Transformation durch den globalen Operator θ in φ für die lokalen Faktoren ein System von 9 Gleichungen erstellt.

Abhängig vom globalen Faktor $\theta \in \{R, S, R \cdot S, R \cdot S^{-1}\}$ im Fixoperator φ fließen aus diesem System eindeutig bestimmte Gleichungen für Produkte aus den beteiligten lokalen Blockoperatoren.

Und die zum betrachteten Typ des Fixoperators φ sich ergebende Form des Blockschemas hängt ab von den durch die globalen Faktoren bestimmen Sequenzen und der Wahl von „Initialblöcken“ darin.

Beim globalen Faktor $R \cdot S$ mit den Sequenzen $(a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3})$, $(a_{2,1}, a_{3,2}, a_{1,3})$, $(a_{3,1}, a_{1,2}, a_{2,3})$ wählen wir Initialblöcke a, b, c auf den Rasterfeldern $A_{1,1}$, $A_{3,2}$ $A_{2,3}$. Man könnte auch die Blöcke auf den Rasterfeldern $A_{3,1}$, $A_{2,2}$ $A_{1,3}$ der Nebendiagonalen nehmen. Bei den anderen globalen Faktoren werden Initialblöcke auf den Rasterfeldern $A_{1,1}$, $A_{2,2}$, $A_{3,3}$ der Hauptdiagonalen gewählt.

<u>R–Form</u>

Anhand der Operatormatrix $\begin{pmatrix} g_1 \cdot h_1 & g_1 \cdot h_2 & g_1 \cdot h_3 \\ g_2 \cdot h_1 & g_2 \cdot h_2 & g_2 \cdot h_3 \\ g_3 \cdot h_1 & g_3 \cdot h_2 & g_3 \cdot h_3 \end{pmatrix}$ des Produkts $g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot h_3$ der lokalen Operatoren im Fixoperator $\varphi = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot R$ sieht man leicht:

Es ist $R(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix})=\begin{pmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}$, also soll sein

$$\begin{pmatrix} g_1 \cdot h_1 & g_1 \cdot h_2 & g_1 \cdot h_3 \\ g_2 \cdot h_1 & g_2 \cdot h_2 & g_2 \cdot h_3 \\ g_3 \cdot h_1 & g_3 \cdot h_2 & g_3 \cdot h_3 \end{pmatrix}(\begin{pmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Das führt zum System der 9 Gleichungen

$a_{1,1} = g_1 \cdot h_1\, a_{3,1}$, $a_{1,2} = g_1 \cdot h_2\, a_{3,2}$, $a_{1,3} = g_1 \cdot h_3\, a_{3,3}$,
$a_{2,1} = g_2 \cdot h_1\, a_{1,1}$, $a_{2,2} = g_2 \cdot h_2\, a_{1,2}$, $a_{2,3} = g_2 \cdot h_3\, a_{1,3}$,
$a_{3,1} = g_3 \cdot h_1\, a_{2,1}$, $a_{3,2} = g_3 \cdot h_2\, a_{2,2}$, $a_{3,3} = g_3 \cdot h_3\, a_{2,3}$.

Sukzessives Einsetzen liefert somit

$a_{1,1} = g_1 \cdot h_1 \cdot g_3 \cdot h_1 \cdot g_2 \cdot h_1\, a_{1,1} \Rightarrow g_1 \cdot h_1 \cdot g_3 \cdot h_1 \cdot g_2 \cdot h_1 = 1 \Leftrightarrow g_1 \cdot g_3 \cdot g_2 = 1$ und $(h_1)^3 = 1$,
$a_{2,2} = g_2 \cdot h_2 \cdot g_1 \cdot h_2 \cdot g_3 \cdot h_2\, a_{2,2} \Rightarrow g_2 \cdot h_2 \cdot g_1 \cdot h_2 \cdot g_3 \cdot h_2 = 1 \Leftrightarrow g_2 \cdot g_1 \cdot g_3 = 1$ und $(h_2)^3 = 1$,
$b_{3,1} = g_3 \cdot h_3 \cdot g_2 \cdot h_3 \cdot g_1 \cdot h_3\, b_{3,3} \Rightarrow g_3 \cdot h_3 \cdot g_2 \cdot h_3 \cdot g_1 \cdot h_3 = 1 \Leftrightarrow g_3 \cdot g_2 \cdot g_1 = 1$ und $(h_3)^3 = 1$.

Für die Operatoren g_1, g_2, g_3 gilt also $g_3 \cdot g_2 \cdot g_1 = 1$ und keiner der Operatoren h_1, h_2, h_3 kann ein Spaltentausch sein.

Aus den drei durchs sukzessive Einsetzen erzeugten Mengen $\{a_{1,1}, a_{2,1}, a_{3,1}\}$, $\{a_{1,2}, a_{2,2}, a_{3,2}\}$, $\{a_{1,3}, a_{2,3}, a_{3,3}\}$ wählt man $a=a_{1,1}$, $b=a_{2,2}$, $c=a_{3,3}$ als Initialblöcke.

An der entstandenen Blockdarstellung (1) von A. erkennt man, dass die Annahme, einer der lokalen Operatoren h_1, h_2, h_3 sei die Identität 1, im betreffenden vertikalen Streifen zum Widerspruch gegen die Sudokubedingungen führt.

Die reduzierte R–Form (1*) ergibt sich durch die Umbenennung $b' = g_1 \cdot g_3\, b$, $c' = g_1\, c$ in der Blockdarstellung von $A' = w\, A$, also nachdem man A anhand des lokalen Operators $w = 1 \cdot (g_1 \cdot g_3) \cdot g_1 \in T(r)$ transformiert, dabei die Gleichung $g_3 \cdot g_2 \cdot g_1 = 1$ berücksichtigend, gerechnet hat:

$$wA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ g_1 \cdot g_3 & g_1 \cdot g_3 & g_1 \cdot g_3 \\ g_1 & g_1 & g_1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a & g_1 \cdot g_3 \cdot (h_2)^2\, b & g_1 \cdot h_3\, c \\ g_2 \cdot h_1 a & b & g_2 \cdot g_1 \cdot (h_3)^2\, c \\ g_3 \cdot g_2 \cdot (h_1)^2\, a & g_3 \cdot h_2\, b & c \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} a & g_1 \cdot g_3 \cdot (h_2)^2\, b & g_1 \cdot h_3\, c \\ h_1 a & g_1 \cdot g_3 b & g_1 \cdot (h_3 \circ)^2\, c \\ (h_1 \circ)^2\, a & g_1 \cdot g_3 \cdot h_2\, b & g_1 \cdot c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & (h_2)^2\, b' & h_3\, c' \\ h_1 a & b' & (h_3)^2\, c' \\ (h_1)^2\, a & h_2\, b' & c' \end{pmatrix} = A^*.$$

In $A' = wA$ ist $b' = g_1 \cdot g_3\, b$, $c' = g_1\, c$ gesetzt, um A^* zu erhalten.

<u>S–Form</u>

Die Herleitung der S–Formen (2) und (2*) verläuft dual zu der von (1) und (1*).

$$\text{Es ist } S\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix}, \text{ also soll sein}$$

$$\begin{pmatrix} g_1 \cdot h_1 & g_1 \cdot h_2 & g_1 \cdot h_3 \\ g_2 \cdot h_1 & g_2 \cdot h_2 & g_2 \cdot h_3 \\ g_3 \cdot h_1 & g_3 \cdot h_2 & g_3 \cdot h_3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Das führt zum System der 9 Gleichungen
$a_{1,1} = g_1{\cdot}h_1\, a_{1,3}$, $a_{1,2} = g_1{\cdot}h_2\, a_{1,1}$, $a_{1,3} = g_1{\cdot}h_3\, a_{1,2}$,
$a_{2,1} = g_2{\cdot}h_1\, a_{2,3}$, $a_{2,2} = g_2{\cdot}h_2\, a_{2,1}$, $a_{2,3} = g_2{\cdot}h_3\, a_{2,2}$,
$a_{3,1} = g_3{\cdot}h_1\, a_{3,3}$, $a_{3,2} = g_3{\cdot}h_2\, a_{3,1}$, $a_{3,3} = g_3{\cdot}h_3\, a_{3,2}$.
Sukzessives Einsetzen und Blockoperatoren-Vergleich liefert die Implikationen
$a_{1,1} = g_1{\cdot}h_1{\cdot}g_1{\cdot}h_3{\cdot}g_1{\cdot}h_2\, a_{1,1} \Rightarrow g_1{\cdot}h_1{\cdot}\, g_1{\cdot}h_3{\cdot}g_1{\cdot}h_2 =1 \Leftrightarrow (g_1)^3 =1$ und $h_1{\cdot}h_3{\cdot}h_2 =1$.
$a_{2,1} = g_2{\cdot}h_1{\cdot}\, g_2{\cdot}h_3{\cdot}g_2{\cdot}h_2\, a_{2,1} \Rightarrow g_2{\cdot}h_1{\cdot}\, g_2{\cdot}h_3{\cdot}g_2{\cdot}h_2 =1 \Leftrightarrow (g_2)^3=1$ und $h_1{\cdot}h_3{\cdot}h_2 =1$.
$a_{3,1} = g_3{\cdot}h_1{\cdot}\, g_3{\cdot}h_3{\cdot}g_3{\cdot}h_2\, a_{3,1} \Rightarrow g_3{\cdot}h_1{\cdot}\, g_3{\cdot}h_3{\cdot}g_3{\cdot}h_2 =1 \Leftrightarrow (g_3)^3=1$ und $h_1{\cdot}h_3{\cdot}h_2 =1$.
Keiner der Operatoren g_1, g_2, g_3 kann also ein Zeilentausch sein und für die h_1, h_2, h_3 gilt $h_3{\cdot}h_2{\cdot}h_1 =1$.
Aus den drei durchs sukzessive Einsetzen erzeugten Mengen
$\{a_{1,1}, a_{1,3}, a_{1,2}\}$, $\{a_{2,1}, a_{2,3}, a_{2,2}\}$, $\{a_{3,1}, a_{3,3}, a_{3,2}\}$ wählt man $a=a_{1,1}$, $b=a_{2,2}$, $c=a_{3,3}$ als Initialblöcke.
An der entstandenen Form des Schemas (2) erkennt man, dass die Annahme, einer der lokalen Operatoren g_1, g_2, g_3 sei die Identität 1, im betreffenden horizontalen Streifen zum Widerspruch gegen die Sudokubedingungen führt.
Die reduzierte S–Form (2*) ergibt sich durch die Umbenennung $b' = h_1{\cdot}h_3\, b$, $c'=h_1\, c$ in der Blockdarstellung von $A' = w\, A$, also nachdem man A anhand des lokalen Operators $w=1{\cdot}(h_1{\cdot}h_3){\cdot}h_1 \in T(s)$ transformiert, dabei die Gleichung $h_3{\cdot}h_2{\cdot}h_1=1$ berücksichtigend, gerechnet hat:

$$w(A) = \begin{pmatrix} 1 & h_1 \cdot h_3 & h_1 \\ 1 & h_1 \cdot h_3 & h_1 \\ 1 & h_1 \cdot h_3 & h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & g_1 \cdot h_2\, a & (g_1)^2 \cdot h_3 \cdot h_2\, a \\ (g_2)^2 \cdot h_1 \cdot h_3\, b & b & g_2 \cdot h_3\, b \\ g_3 \cdot h_1 c & (g_3)^2 \cdot h_2 \cdot h_1 c & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & g_1 a & (g_1)^2 a \\ (g_2)^2 \cdot h_1 \cdot h_3\, b & h_1 \cdot h_3 b & g_2 \cdot h_1 \cdot h_3\, b \\ g_3 \cdot h_1 c & (g_3)^2 \cdot h_1 c & h_1 c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & g_1 a & (g_1)^2 a \\ (g_2)^2 b' & b' & g_2 b' \\ g_3 c' & (g_3)^2 c' & c' \end{pmatrix} = A^*,$$

In $A' = wA$ ist $b' = h_1{\cdot}h_3\, b$, $c' = h_1\, c$ gesetzt, um A^* zu erhalten.

<u>RS–Form</u>

Zur Herleitung der RS–Form (3) rechnet man :.

$$\text{Es ist } R{\cdot}S\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \text{ also soll sein}$$

$$\begin{pmatrix} g_1 \cdot h_1 & g_1 \cdot h_2 & g_1 \cdot h_3 \\ g_2 \cdot h_1 & g_2 \cdot h_2 & g_2 \cdot h_3 \\ g_3 \cdot h_1 & g_3 \cdot h_2 & g_3 \cdot h_3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Das führt zum System der 9 Gleichungen
$a_{1,1} = g_1{\cdot}h_1\, a_{3,3}$, $a_{1,2} = g_1{\cdot}h_2\, a_{3,1}$, $a_{1,3} = g_1{\cdot}h_3\, a_{3,2}$,
$a_{2,1} = g_2{\cdot}h_1\, a_{1,3}$, $a_{2,2} = g_2{\cdot}h_2\, a_{1,1}$, $a_{2,3} = g_2{\cdot}h_3\, a_{1,2}$,
$a_{3,1} = g_3{\cdot}h_1\, a_{2,3}$, $a_{3,2} = g_3{\cdot}h_2\, a_{2,1}$, $a_{3,3} = g_3{\cdot}h_3\, a_{2,2}$.
Sukzessives Einsetzen und Blockoperatoren-Vergleich liefert die Implikationen
$a_{1,1} = g_1{\cdot}h_1{\cdot}\, g_3{\cdot}h_3{\cdot}\, g_2{\cdot}h_2\, a_{1,1} \Rightarrow g_1{\cdot}h_1{\cdot}\, g_3{\cdot}h_3{\cdot}\, g_2{\cdot}h_2 =1 \Leftrightarrow g_1{\cdot}g_3{\cdot}g_2=1$ und $h_1{\cdot}h_3{\cdot}h_2 =1$,
$a_{2,1} = g_2{\cdot}h_1{\cdot}\, g_1{\cdot}h_3{\cdot}\, g_3{\cdot}h_2\, a_{2,1} \Rightarrow g_2{\cdot}h_1{\cdot}\, g_1{\cdot}h_3{\cdot}\, g_3{\cdot}h_2 =1 \Leftrightarrow g_2{\cdot}g_1{\cdot}g_3=1$ und $h_1{\cdot}h_3{\cdot}h_2 =1$,
$a_{3,1} = g_3{\cdot}h_1{\cdot}\, g_2{\cdot}h_3{\cdot}\, g_1{\cdot}h_2\, a_{3,1} \Rightarrow g_3{\cdot}h_1{\cdot}\, g_2{\cdot}h_3{\cdot}\, g_1{\cdot}h_2 =1 \Leftrightarrow g_3{\cdot}g_2{\cdot}g_1=1$ und $h_1{\cdot}h_3{\cdot}h_2 =1$.
Fürs Tripel mit den Faktoren g_1, g_2, g_3 gilt $g_3{\cdot}g_2{\cdot}g_1=1$, fürs Tripel mit h_1 , h_2 , h_3 gilt $h_3{\cdot}h_2{\cdot}h_1 =1$.
Aus den drei durchs sukzessive Einsetzen erzeugten Mengen

$\{a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}\}$, $\{a_{2,1}, a_{3,2}, a_{1,3}\}$, $\{a_{3,1}, a_{1,2}, a_{2,3}\}$, wählt man die Blöcke $a=a_{1,1}$, $b=a_{3,2}$, $c=a_{2,3}$ auf den Rasterfeldern $A_{1,1}$, $A_{3,2}$ $A_{2,3}$ des Sudoku-Schemas zur Bildung einer Initialbasis. Die Blöcke in der Hauptdiagonalen liegen simultan in einer Sequenz und können hier nicht als Initialbasis dienen.

Man erhält die RS–Form $A = \begin{pmatrix} a & g_1 \cdot g_3 \cdot h_2 \cdot h_1 c & g_1 \cdot h_3 b \\ g_2 \cdot g_1 \cdot h_1 \cdot h_3 b & g_2 \cdot h_2 a & c \\ g_3 \cdot h_1 c & b & g_3 \cdot g_2 \cdot h_3 \cdot h_2 a \end{pmatrix}$, wobei

$g_3 \cdot g_2 \cdot g_1=1$ und $h_3 \cdot h_2 \cdot h_1 =1$.

Die reduzierte RS–Form (3*) ergibt sich durch die Umbenennung $b'=g_1 \cdot h_1 \cdot h_3\, b$, $c'=g_1 \cdot g_3 \cdot h_1\, c$ in der Blockdarstellung von $A' = w\,A$, also nachdem man A anhand des lokalen Operators $w=1\cdot(g_1 \cdot g_3)\cdot g_1 \cdot 1\cdot(h_1 \cdot h_3)\cdot h_1 \in T(r)xT(s)$ transformiert, dabei die Gleichungen $g_3 \cdot g_2 \cdot g_1=1$ und $h_3 \cdot h_2 \cdot h_1=1$ berücksichtigend, gerechnet hat:

$$w(A) = \begin{pmatrix} 1 & h_1 \cdot h_3 & h_1 \\ g_1 \cdot g_3 & g_1 \cdot g_3 \cdot h_1 \cdot h_3 & g_1 \cdot g_3 \cdot h_1 \\ g_1 & g_1 \cdot h_1 \cdot h_3 & g_1 \cdot h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & g_1 \cdot g_3 \cdot h_2 \cdot h_1 c & g_1 \cdot h_3 b \\ g_2 \cdot g_1 \cdot h_1 \cdot h_3 b & g_2 \cdot h_2 a & c \\ g_3 \cdot h_1 c & b & g_3 \cdot g_2 \cdot h_3 \cdot h_2 a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & g_1 \cdot g_3 \cdot h_1 c & g_1 \cdot h_1 \cdot h_3 b \\ g_1 \cdot h_1 \cdot h_3 b & a & g_1 \cdot g_3 \cdot h_1 c \\ g_1 \cdot g_3 \cdot h_1 c & g_1 \cdot h_1 \cdot h_3 b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c' & b' \\ b' & a & c' \\ c' & b' & a \end{pmatrix} = A^*,$$

In $A'= wA$ ist $b'=g_1 \cdot h_1 \cdot h_3\, b$, $c'=g_1 \cdot g_3 \cdot h_1\, c$ gesetzt, um A^* zu erhalten.

RSS–Form

Zur Herleitung der RSS–Form rechnet man:

Es ist $R \cdot S^{-1} \left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} \end{pmatrix}$, also soll sein

Es soll sein: $\begin{pmatrix} g_1 \cdot h_1 & g_1 \cdot h_2 & g_1 \cdot h_3 \\ g_2 \cdot h_1 & g_2 \cdot h_2 & g_2 \cdot h_3 \\ g_3 \cdot h_1 & g_3 \cdot h_2 & g_3 \cdot h_3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$.

Das führt zum System der 9 Gleichungen

$a_{1,1} = g_1 \cdot h_1\, a_{3,2}$, $a_{1,2} = g_1 \cdot h_2\, a_{3,3}$, $a_{1,3} = g_1 \cdot h_3\, a_{3,1}$,
$a_{2,1} = g_2 \cdot h_1\, a_{1,2}$, $a_{2,2} = g_2 \cdot h_2\, a_{1,3}$, $a_{2,3} = g_2 \cdot h_3\, a_{1,1}$,
$a_{3,1} = g_3 \cdot h_1\, a_{2,2}$, $a_{3,2} = g_3 \cdot h_2\, a_{2,3}$, $a_{3,3} = g_3 \cdot h_3\, a_{2,1}$.

Es ergeben sich nach sukzessives Einsetzen der 9 Gleichungen die Implikationen

$a_{1,1} = g_1 \cdot h_1 \cdot g_3 \cdot h_2 \cdot g_2 \cdot h_3\, a_{1,1} \Rightarrow g_1 \cdot h_1 \cdot g_3 \cdot h_2 \cdot g_2 \cdot h_3 =1 \Leftrightarrow g_1 \cdot g_3 \cdot g_2=1$ und $h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 =1$,
$a_{2,2} = g_2 \cdot h_2 \cdot g_1 \cdot h_3 \cdot g_3 \cdot h_1\, a_{2,2} \Rightarrow g_2 \cdot h_2 \cdot g_1 \cdot h_3 \cdot g_3 \cdot h_1 =1 \Leftrightarrow g_2 \cdot g_1 \cdot g_3=1$ und $h_2 \cdot h_3 \cdot h_1 =1$,
$a_{3,3} = g_3 \cdot h_3 \cdot g_2 \cdot h_1 \cdot g_1 \cdot h_2\, a_{3,3} \Rightarrow g_3 \cdot h_3 \cdot g_2 \cdot h_1 \cdot g_1 \cdot h_2 =1 \Leftrightarrow g_3 \cdot g_2 \cdot g_1=1$ und $h_3 \cdot h_1 \cdot h_2 =1$.

Fürs Tripel mit den Faktoren g_1, g_2, g_3 gilt $g_3 \cdot g_2 \cdot g_1=1$, fürs Tripel mit h_1, h_2, h_3 gilt $h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 =1$.
Aus den drei durchs sukzessive Einsetzen erzeugten Mengen
$\{a_{1,1}, a_{2,3}, a_{3,2}\}$, $\{a_{2,1}, a_{3,3}, a_{1,2}\}$, $\{a_{3,1}, a_{1,3}, a_{2,2}\}$ wählt man mit den Blöcken $a=a_{1,1}$, $b=a_{2,2}$, $c=a_{3,3}$ auf den Rasterfeldern $A_{1,1}$, $A_{2,2}$ $A_{3,3}$ der Hauptdiagonalen eine Initialbasis. Man erhält

$$A = \begin{pmatrix} a & g_1 \cdot h_2 c & g_1 \cdot g_3 \cdot h_3 \cdot h_1 b \\ g_2 \cdot g_1 \cdot h_1 \cdot h_2 c & b & g_2 \cdot h_3 a \\ g_3 \cdot h_1 b & g_3 \cdot g_2 \cdot h_2 \cdot h_3 a & c \end{pmatrix}.$$

Die reduzierte RSS–Form (4*) ergibt sich durch die Umbenennung $b'=g_1 \cdot g_3 \cdot h_1\, b$, $c'=g_1 \cdot h_1 \cdot h_2\, c$ in der Blockdarstellung von $A' = w\,A$, also nachdem man A anhand des lokalen Operators $w=1\cdot(g_1 \cdot g_3)\cdot g_1 \cdot 1 \cdot h_1 \cdot (h_1 \cdot h_2) \in T(r)xT(s)$ transformiert, dabei die Gleichungen $g_3 \cdot g_2 \cdot g_1=1$ und $h_1 \cdot h_2 \cdot h_3=1$ berücksichtigend, gerechnet hat:

$$w(A) = \begin{pmatrix} 1 & h_1 & h_1 \cdot h_2 \\ g_1 \cdot g_3 & g_1 \cdot g_3 \cdot h_1 & g_1 \cdot g_3 \cdot h_1 \cdot h_2 \\ g_1 & g_1 \cdot h_1 & g_1 \cdot h_1 \cdot h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & g_1 \cdot h_2 c & g_1 \cdot g_3 \cdot h_3 \cdot h_1 b \\ g_2 \cdot g_1 \cdot h_1 \cdot h_2 c & b & g_2 \cdot h_3 a \\ g_3 \cdot h_1 b & g_3 \cdot g_2 \cdot h_2 \cdot h_3 a & c \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a & g_1\cdot h_1\cdot h_2 c & g_1\cdot g_3\cdot h_1 b \\ g_1\cdot h_1\cdot h_2 c & g_1\cdot g_3\cdot h_1 b & a \\ g_1\cdot g_3\cdot h_1 b & a & g_1\cdot h_1\cdot h_2 c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c' & b' \\ c' & b' & a \\ b' & a & c' \end{pmatrix} = A^*,$$

In A'= wA ist $b'=g_1\cdot g_3\cdot h_1$ b, $c'=g_1\cdot h_1\cdot h_2$ c gesetzt, um A* zu erhalten.
Setzt man anfangs $a=a_{1,1}$, $c=a_{2,2}$, $b=a_{3,3}$, bewirkt dies einen Tausch der Bezeichnungen b, c .

Quadrate von Fixoperatoren

Wenn ein Fixsudoku $A\in X$ einen Fixoperator φ mit einem globalen Faktor aus der Menge {R , S, R·S , $R\cdot S^{-1}$ } hat, besitzt es mit dem Quadrat φ^2 des Operators einen Fixoperator φ' mit einem globalen Faktor aus der Menge {R^{-1} , S^{-1} , $R^{-1}\cdot S^{-1}$, $R^{-1}\cdot S$} . Die Quadrate der Operatoren haben in Abhängigkeit vom Typ folgende Form

(1) $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3\cdot R \in G_0 \;\rightarrow\; \varphi^2 = (g_2\cdot g_1)\cdot(g_3\cdot g_2)\cdot(g_1\cdot g_3)\cdot(h_1)^2\cdot(h_2)^2\cdot(h_3)^2\cdot R^{-1}$,

(2) $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3\cdot S \in G_0 \;\rightarrow\; \varphi^2 = (g_1)^2\cdot(g_2)^2\cdot(g_3)^2\cdot(h_2\cdot h_1)\cdot(h_3\cdot h_2)\cdot(h_1\cdot h_3)\cdot S^{-1}$,

(3) $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3\cdot R\cdot S \in G_0 \;\rightarrow\; \varphi^2 = (g_2\cdot g_1)\cdot(g_3\cdot g_2)\cdot(g_1\cdot g_3)\cdot(h_2\cdot h_1)\cdot(h_3\cdot h_2)\cdot(h_1\cdot h_3)\cdot R^{-1}\cdot S^{-1}$,

(4) $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3\cdot R\cdot S^{-1} \in G_0 \;\rightarrow\; \varphi^2 = (g_2\cdot g_1)\cdot(g_3\cdot g_2)\cdot(g_1\cdot g_3)\cdot(h_3\cdot h_1)\cdot(h_1\cdot h_2)\cdot(h_2\cdot h_3)\cdot R^{-1}\cdot S$.

Da in einer Fixgruppe zu einem Fixoperator φ stets auch φ^2 enthalten ist, wird anhand der globalen Faktoren R^{-1} , S^{-1} , $R^{-1}\cdot S^{-1}$, $R^{-1}\cdot S$ die gleiche Typisierung von Fixsudokus wie mit jenen aus der Menge {R , S, R·S , $R\cdot S^{-1}$ } bewirkt .

§3. Anzahlen von Sudokus und G–Bahnen

Diagonalblocknormierte Sudokus

Eine wesentliche Rolle bei computergestützten Anzahlbestimmungen in der Menge X aller Sudokus spielen die in [1] von Wolfram Jehne eingeführten diagonalblocknormierten Sudokus, wir sagen kurz **dbn-Sudokus**. Solche Sudokus dienen nach [1] als Basis einer Parametrisierung aller Sudokus.

Ein Sudoku $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ ist ein e-normiertes Sudoku, wenn $a_{1,1} = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Ein e-normiertes Sudoku hat diagonalblocknormierte Gestalt, wenn in den übrigen zwei Blöcken $a_{2,2}$ und $a_{3,3}$ der Hauptdiagonalen

1) die Raster-Positionen $A_{2,2,1,1}$, $A_{3,3,1,1}$ mit Ziffer 1 belegt sind ,
2) die Ziffer in Raster-Position $A_{2,2,2,2}$ kleiner ist als die Ziffern in den Raster-Positionen $A_{2,2,2,3}$, $A_{2,2,3,2}$ und $A_{2,2,3,3}$,
3) die Ziffer in Raster-Position $A_{3,3,2,2}$ kleiner ist als die Ziffern in den Raster-Positionen $A_{3,3,2,3}$, $A_{3,3,3,2}$ und $A_{3,3,3,3}$.

Durch Permutation von Zeilen und Spalten innerhalb der zweiten und dritten Blockzeilen HS_2,HS_3, bzw. Blockspalten VS_2,VS_3, also Operatoren aus $T_{23}^* = \{1\}xT_2(r)xT_3(r)\; x\; \{1\}xT_2(s)xT_3(s)$, kann ein e-normiertes Sudoku stets in diagonalblocknormierte Gestalt transformiert werden.
Die kleine Mischgruppe $M = Z \times T_{23}^*$ operiert mit ihren $\#M = 9!\cdot 6^4$ Elementen auf der Menge X aller Sudokus fixpunktfrei. Zudem kann jedes Sudoku $A\in X$ mittels eines dbn-Sudokus und eines Operators von M erzeugt werden.
Die große Mischgruppe $M^* = Z \times T^*$ mit $T^* = T(r)xT(s) = T_1(r)xT_2(r)xT_3(r)\; x\; T_1(s)\, xT_2(s)xT_3(s)$ als Faktor hat Fixpunkte. Das ergibt sich aus dem Vergleich der Elementanzahl $\#M^* = 9!\cdot 6^6$ mit der Zahl N für die Menge X aller Sudokus. Würde die große Mischgruppe M* auf X fixpunktfrei operieren, müsste $\#M^* = 9!\cdot 6^6 = 9!\cdot 3^6\cdot 2^6$ Teiler von $N= 9!\cdot 3^4\cdot 2^{13}\cdot p$ sein.
In [2] zählte A.Schönhage $N_0 = 2^9\cdot p$ = 14 184585 201152 diagonalblock-normierte Sudokus, wobei p= 27704 267971 eine Primzahl. Er bestätigte mit diesem Zählergebnis die von Felgenhauer/Jarvis in [15] angegebene Zahl $N = 9!\cdot 6^4\cdot N_0 = 9!\cdot 3^4\cdot 2^{13}\cdot p$ = 6670 903752 021072 936960 aller Sudokus.

Anzahlen diagonalblocknormierter Fixsudokus

In [3] entwickelte A.Schönhage anhand der von den 27 Zeilen und 27 Spalten der 9 Blöcke eines Sudokus gebildeten „Dreiermengen“ Systeme (3*), (4*), (5*), (6*) von jeweils 18 Gleichungen, mittels deren getestet werden kann, welchen der Fixoperatoren-Typen R, S, R·S oder $R\cdot S^{-1}$ ein vorgelegtes $A\in X$ zulässt. Im neuen Durchgang seines Zählalgorithmus [4] testete er anhand der Systeme (3*),(4*),(5*),(6*), bei welchen Bezirks-Leadern Fixsudokus vorkamen. Er fand
1 Bezirk mit 1 Tripel, dessen Leader -das (e,e,e)-Tripel- hatte 64 Fortsetzungen zum Fixsudoku,
1 Bezirk mit 12 Tripeln, dessen Leader hatte 26 Fortsetzungen zum Fixsudoku,
1 Bezirk mit 12 Tripeln, dessen Leader hatte 17 Fortsetzungen zum Fixsudoku,

19 Bezirke mit insgesamt 2578 Tripeln, deren Leader hatten 16 Fortsetzungen zum Fixsudoku,
383 Bezirke mit insgesamt 139 932 Tripeln, deren Leader hatten 8 Fortsetzungen zum Fixsudoku,
insgesamt zählte er also 1+1+1+19+383=405 Bezirke, die zusammengenommen
1+12+12+2578+139932= 142535 dbn-Tripel (e,b,c) alias „Hausnummern" umfassen.
Unter den $N_0 = 2^9 \cdot p$, p=27704 267971, dbn-Sudokus wurden damit entdeckt und gezählt
$N_{0,f} = 1\cdot 64 + 12\cdot 26 + +12\cdot 17 + 2578\cdot 16 + 139932\cdot 8 = 1\,161284 = 4\cdot 41\cdot 73\cdot 97$ Fixsudokus, darunter die
$N_{0,sf} = 4$ e-normierten Superfixe U_1,U_2,U_3,U_4 . Sein Pentium-4 schaffte es in ca. 12 Minuten.
Die Fixsudokus des erstgenannten Bezirks sind in den Listen L4eee, L36eee und L24eee aufgeführt, in der Liste L261ebc die des zweitgenannten, in Liste L17ebc die des drittgenannten.
Blockoperatordarstellungen dieser Sudokus findet man in [6], [7a], [7b], [7c], [8], [11], [12] sowie den Skripten [A7a], [A7b], [A7c],[A11], [A12] des Anhangs.

Gesamtzahlen der Fixsudokus

In M-Bahnen, deren Leader Fixsudokus sind, liegen nur zum Leader M-konjugierte Fixsudokus.
Auf diesem Wege hat Arnold Schönhage die Anzahl aller Fixsudokus in X bestimmt und fand
$N_f = 9!\cdot 6^4\cdot N_{0,f} = 9!\cdot 6^4\cdot (2^2\cdot 41\cdot 73\cdot 97) = 9!\cdot 6^4\cdot 2^2\cdot 290321 = 546\,143132\,344320$ Fixsudokus,
$N_{sf} = 9!\cdot 6^4\cdot N_{0,sf} = 9!\cdot 6^4\cdot 2^2 = 9!\cdot 6^4\cdot 2^2\cdot 1 = 1881\,169920$ Superfixe,
$N_{nf} = N_f - N_{sf} = 9!\cdot 6^4\cdot (N_{0,f} - N_{0,sf}) = 9!\cdot 6^4\cdot 2^2\cdot 290320 = 546\,141251\,174400$ normale Fixsudokus.

In Verbindung mit diesen Zählergebnissen ergeben sich, die durch Tausch von Zeilen gegen Spalten bewirkte Dualität im System benutzend, die in §1 erstellten Anzahlen der Sudokus mit typischem Fixoperator auf folgendem Wege:
Gemäß [L7], der Liste L80e der genormten Vertikalen von Winkel-Praesudoklus, gibt es
$N_{e,f3} = 40$ e-normierte reduzierte Fixsudokus vom RS–Typ sowie $N_{e,f4} = 40$ vom RSS–Typ und damit
$N_{nf3} = 9!\cdot 6^4\cdot (40 - N_{e,sf}) = 9!\cdot 6^4\cdot 2^2\cdot 9$ normale Fixsudokus vom RS–Typ,
$N_{nf4} = 9!\cdot 6^4\cdot (40 - N_{e,sf}) = 9!\cdot 6^4\cdot 2^2\cdot 9$ normale Fixsudokus vom RSS–Typ, also restliche
$N_{nf12} = N_{nf} - (N_{nf3} + N_{nf4}) = 9!\cdot 6^4\cdot 2^2\cdot 290302$ normale Fixsudokus vom R–Typ oder S–Typ.
Die durch die Dualität bedingte Gleichung $N_{nf1} = N_{nf2}$ benutzend gibt es also
$N_{nf1} = 9!\cdot 6^4\cdot 2^2\cdot 145151 = 9!\cdot 6^4\cdot 2^2\cdot 37\cdot 3923$ normale Fixsudokus vom R–Typ,
$N_{nf2} = 9!\cdot 6^4\cdot 2^2\cdot 145151 = 9!\cdot 6^4\cdot 2^2\cdot 37\cdot 3923$ normale Fixsudokus vom S–Typ.
Zu jeder der Anzahlen gibt es $N_{sf} = 9!\cdot 6^4\cdot 2^2\cdot 1$ Superfixe des betreffenden Typs.
Also hat man in Übereinstimmung mit den in §1 bestimmten Anzahlen insgesamt
$N_{f1} = 9!\cdot 6^4\cdot n_{f1} = 9!\cdot 6^4\cdot 2^2\cdot 145152 = 9!\cdot 6^4\cdot 2^{10}\cdot 3^4\cdot 7$ Fixsudokus mit einem Fixoperator vom R–Typ,
$N_{f2} = 9!\cdot 6^4\cdot n_{f2} = 9!\cdot 6^4\cdot 2^2\cdot 145152 = 9!\cdot 6^4\cdot 2^{10}\cdot 3^4\cdot 7$ Fixsudokus mit einem Fixoperator vom S–Typ,
$N_{f3} = 9!\cdot 6^4\cdot n_{f3} = 9!\cdot 6^4\cdot 2^2\cdot 10 = 9!\cdot 6^4\cdot 2^3\cdot 5$ Fixsudokus mit einem Fixoperator vom RS–Typ,
$N_{f4} = 9!\cdot 6^4\cdot n_{f4} = 9!\cdot 6^4\cdot 2^2\cdot 10 = 9!\cdot 6^4\cdot 2^3\cdot 5$ Fixsudokus mit einem Fixoperator vom RSS–Typ .

Gesamtzahl der normalen Sudokus

$N_{ns} = N - N_f = 9!\cdot 6^4\cdot 2^9\cdot p - 9!\cdot 6^4\cdot nn_f = 9!\cdot 6^4\cdot (2^9\cdot p - 2^2\cdot 41\cdot 73\cdot 97)$
$= 9!\cdot 6^4\cdot (512\cdot p - 2^2\cdot 290321) = 9!\cdot 6^4\cdot 2^2\cdot (128\cdot p - 290321)$
$= 9!\cdot 6^4\cdot 2^2\cdot (3\,546146300288 - 290321) = 9!\cdot 6^4\cdot 2^2\cdot 3\,546146009967$ normale Sudokus.

Anzahlen der G_0- sowie G-Bahnen

Normale Sudokus haben keinen Fixoperator $\neq$id in der Sudokugruppe G mit ihren $|G| = 2\cdot 6^8$ Elementen, insbesondere auch nicht in der kleinen Sudokugruppe G_0 mit ihren $|G_0| = 6^8$ Elementen.
Deren G_0-Bahnen haben stets die Länge $|G_0|$=1 679616, deren G-Bahnen die Länge $|G|$=3 359232.
Normal Fixsudokus haben Fixgruppen der Ordnung 3, ihre G_0-Bahnen die Länge $|G_0|/3$ =559872 .
Superfixe haben Fixgruppen der Ordnung 9, ihre G_0-Bahnen haben die Länge $|G_0|/9$ =186624 .
Dividiert man die Sudoku-Anzahl einer solchen Sorte durch die Länge ihrer G_0-Bahn, ergibt sich die betreffende Anzahl der G_0-Bahnen. Die betrachteten Anzahlen haben alle einen Vorfaktor
$9!\cdot 6^4\cdot 2^2 = 2\cdot 6^8\cdot 140\cdot 2^2 = 2\cdot |G_0|\cdot 560$ .Somit gibt es
$Q_{ns} = N_{ns}/|G_0| = 2\cdot 560\cdot 3\,546146\,009967$ G_0-Bahnen normaler Sudokus (Länge $|G_0|$),
$Q_{nf} = 3\cdot N_{nf}/|G_0| = 2\cdot 560\cdot 870960$ G_0-Bahnen normaler Fixsudokus (Länge $|G_0|/3$),
$Q_{sf} = 9\cdot N_{sf}/|G_0| = 2\cdot 560\cdot 9 = 2\cdot 7!$ G_0-Bahnen superfixer Sudokus (Länge $|G_0|/9$),
insgesamt also $Q_0 = Q_{ns} + Q_{nf} + Q_{sf} = 2\cdot 560\cdot 3\,546146\,880936$ G_0-Bahnen.
Je zwei G_0-Bahnen liefern eine G-Bahn. Insgesamt gibt es somit $Q = Q_0/2$ G-Bahnen.
Insbesondere gibt es $560\cdot 9 = 7!$ G-Bahnen superfixer Sudokus (Länge $|G|/9$).

§4. Beispiele, Spezielle Darlegungen

Normale Fixsudokus vom R–Typ

Beispiele e-normierter normaler Fixsudokus vom R–Typ sind
die Sudokus A_i , $i\in\{0,1,2,...12\}$ der Liste L24eee(1),
die Sudokus K_i , $i\in\{1,2,3,4, 10,11,12,13\}$ der Liste L17ebc,
die Sudokus 1,2,3,4, 9,10,11,12, 18,19,20,21,23,24,25,26 der Liste L261ebc.
Im Skript [A7a] des Anhangs, einer Aktualisierung von [7a] mit geänderter Nomenklatur, sind anhand von Blockoperatordarstellungen der Sudokus A_i aus L24eee(1) deren reduzierte Formen hergeleitet. Beachtenswert ist die durch lokale Operatoren beschriebene Abhängigkeit aller Blöcke vom Block e.
Im Skript [A12] des Anhangs, einer Aktualisierung des am 24.Feb 2010 verfassten Nachtrags [12] zum Skript [10] mit geänderter Nomenklatur, sind anhand von Blockoperatordarstellungen der Sudokus K_i aus L17ebc, $i\in\{1,2,3,4, 10,11,12,13\}$, deren reduzierte Formen hergeleitet. Zudem ist dort für diese Fixsudokus K_i auch der in §1 für e-normierte Fixsudokus vom R–Typ beschriebenen Schritt S2 exemplarisch dargelegt.

Eine spezielle Darlegung des in §1 für e-normierte Sudokus beschriebenen Schrittes K3 der Konstruktion zum R–Typ enthält das Wolfram Jehne zum 84.Geburtstag gewidmete Skript [10] .
In aktualisierter Darstellung wird dort wie folgt argumentiert:
In Bezug auf ein $h=h_1\cdot h_2\cdot h_3 \in T(s)$ mit $h_1,h_2,h_3\in\{s,s^{-1}\}$ wird nach Vorgabe eines $g=g_1\cdot g_2\cdot g_3 \in T(r)$ mit $g_3\cdot g_2\cdot g_1 =1$ ein vorgelegtes reduziertes Sudoku A* in allgemeiner , nicht notwendig e-normierter R–Form mittels $b'=g_1\cdot g_3\, b$, $c' =g_1\, c$ in A' umgeschrieben, man setzt dann $w =1\cdot(g_1\cdot g_3)\cdot g_1 \in T(r)$ und erhält zufolge $g_3\cdot g_2\cdot g_1 =1\Leftrightarrow g_1\cdot g_3\cdot g_2 =1\Leftrightarrow g_2\cdot g_1\cdot g_3 =1$ damit ein $w^{-1} =1\cdot g_2\cdot(g_3\cdot g_2)\in T(r)$ zur Bildung von $A=w^{-1} A' = 1\cdot g_2\cdot(g_3\cdot g_2)A'$, das den Fixoperator $\varphi=g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3\cdot R$ hat.
Explizit kann man somit mit einem $h=h_1\cdot h_2\cdot h_3 \in T(s)$, $h_1,h_2,h_3\in\{s,s^{-1}\}$, schreiben:

$$A= w^{-1} A' =1\cdot g_2\cdot(g_3\cdot g_2)\begin{pmatrix} a & h_2^2 b' & h_3 c' \\ h_1 a & b' & h_3^2 c' \\ h_1^2 a & h_2 b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & h_2^2 b' & h_3 c' \\ g_2\cdot h_1 a & g_2 b' & g_2\cdot h_3^2 c' \\ g_3\cdot g_2\cdot h_1^2 a & g_3\cdot g_2\cdot h_2 b' & g_3\cdot g_2\cdot c' \end{pmatrix}.$$

Setzt man hier $b' =g_1\cdot g_3 b$, $c' =g_1 c$ alias $b= g_2 b'$, $c= g_3\cdot g_2 c'$, so ergibt sich für A die Darstellung

$$A=\begin{pmatrix} a & g_1\cdot g_3\cdot h_2^2 b & g_1\cdot h_3 c \\ g_2\cdot h_1 a & b & g_2\cdot g_1\cdot h_3^2 c \\ g_3\cdot g_2\cdot h_1^2 a & g_3\cdot h_2 b & c \end{pmatrix}.$$

Ihr entnimmt man durch folgende Rechnung, dass $\varphi=g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3\cdot R$ ein Fixoperator von A ist:

$$\varphi A=\begin{pmatrix} g_1\cdot h_1 & g_1\cdot h_2 & g_1\cdot h_3 \\ g_2\cdot h_1 & g_2\cdot h_2 & g_2\cdot h_3 \\ g_3\cdot h_1 & g_3\cdot h_2 & g_3\cdot h_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_3\cdot g_2\cdot h_1^2 a & g_3\cdot h_2 b & c \\ a & g_1\cdot g_3\cdot h_2^2 b & g_1\cdot h_3 c \\ g_2\cdot h_1 a & b & g_2\cdot g_1\cdot h_3^2 c \end{pmatrix}=A.\quad \text{qed.}$$

Ist A' ein e-normiertes Sudoku, so ist offenbar mit dem angegebnem w auch das erzeugte Sudoku A e-normiert.

Normale Fixsudokus vom S–Typ

Beispiele e-normierter normaler Fixsudokus vom S–Typ sind
die Sudokus A_i , $i\in\{1,2,3,...,12\}$ der Liste L24eee(2),
die Sudokus 6,7,8,9, 14,15,16,17 der Liste L17ebc,
die Sudokus 5,6,7,8,13,14,15, 16 der Liste L261ebc .

Normale Fixsudokus vom RS–Typ

Beispiele reduzierter e-normierter normaler Fixsudokus vom RS–Typ sind die Sudokus $S_i\in\{1,2,,...,36\}$ der Liste L36eee. Sie sind auch in Liste rs36rss aufgeführt. Im Skript [A7c] des Anhangs werden anhand von Blockoperatordarstellungen Abhängigkeiten unter ihnen aufgezeigt.

Normale Fixsudokus vom RSS–Typ

Beispiele e-normierter reduzierter normaler Fixsudokus vom RSS–Typ sind die Transformationsbilder $R_1(S_i)$ der Sudokus $S_i \in\{1,2,3,...,36\}$ der Liste L36eee. Beispiele e-normierter normaler Fixsudokus vom RSS–Typ sind die Sudokus H_i , $i\in\{0,1,2,...,35\}$ der Liste rs36rss.

Weitere Beispiele e-normierter normaler Fixsudokus vom RSS–Typ sind das 5-te Sudoku der Liste L17ebc sowie das 17-te und 22-te Sudoku der Liste L261ebc.
Eine spezielle Darlegung unter exemplarischen Bezug aufs Sudoku H_0 für den in §1 für e-normierte Sudokus beschriebenen Schritt S3 der Konstruktion zum RSS–Typ befindet sich im Skript [A11] des Anhangs, einer Aktualisierung der am 15.Feb 2010 verfassten Ergänzung [11] zum Skript [10] mit geänderter Nomenklatur. Zudem ist dort der Zusammenhang von H_0 mit S_1 und S_{36} aus Liste L36eee beschrieben.

Superfixe vom RS–Typ bzw. RSS–Typ

Die in §1 angegebenen Superfixe U_1, U_2, U_3, U_4 der Liste L4eee sind die einzig möglichen reduzierten e-normierten Superfixe vom RS–Typ und deren Transformationsbilder $U'_1 = R_1U_1$, $U'_2 = R_1U_2$, $U'_3 = R_1U_3$, $U'_4 .= R_1U_4$ die einzig möglichen reduzierten e-normierten Superfixe vom RSS–Typ.
Im Skript [A7b], einer Aktualisierung von [7b] mit geänderter Nomenklatur, sind reduzierte Formen der Superfixe U_1, U_2, U_3, U_4 zu jedem der Typen hergeleitet.

Urbeispiel U_0 eines Superfix

Für Superfixe gibt es insgesamt $2{\cdot}7!$ G_0–Bahnen der Länge $\#G_0/9 = 6^8/9 = 4 \cdot 6^6 = 186624$,
Die Superfixe U_1, U_2, U_3, U_4 liegen zusammen in der selben G_0-Bahn, etwa in der von U_1 geführten.
Diese Bahn G_0U_1 enthält nur Superfixe, darunter das Urbeispiel $U_0 = w^{-1}U_1$, wobei $w=1{\cdot}r{\cdot}r^{-1} \cdot 1{\cdot}s^{-1}{\cdot}s \in T(r)xT(s)$ die Transformation $U_1 = wU_0$ leistet, also $w^{-1} = 1{\cdot}r^{--1} \cdot r \cdot 1{\cdot}s{\cdot} s^{-1}$ ist.
U_0 ist das erste von Arnold Schönhage gefundene Sudoku mit einer 9-elementigen Fixgruppe, es ist e-normiert, jedoch nicht wie U_1 reduziert vom RS–Typ. Seine Fixoperatoren sind mittels w^{-1} konjugiert zu jenen von U_1, seine Fixgruppe ist somit $F_{Go}(U_0) = w^{-1}\, F_{Go}(U_1)\, w$, wobei
$F_{Go}(U_1) =\{1, R{\cdot}S,\ R^{-1}{\cdot}S^{-1},\ \mathbf{r{\cdot}s}{\cdot}R,\ \mathbf{r{\cdot}s}{\cdot}S^{-1},\ \mathbf{r{\cdot}s}{\cdot}R^{-1}{\cdot}S,\ \mathbf{r^{-1}{\cdot}s^{-1}}{\cdot}S^{-1},\ \mathbf{r^{-1}{\cdot}s^{-1}}{\cdot}S,\ \mathbf{r^{-1}{\cdot}s^{-1}}{\cdot}R{\cdot}S^{-1}\}$.

Anhang

[L1] Liste L4eee vom Aug/Dez 2008
[L2] Liste L36eee vom 9.Nov 2009
[L3] Liste rs36rss vom 14.Febr. 2010
[L4] Liste L24eee vom 21.Nov 2009
[L5] Liste L261ebc vom 21.Dez 2008
[L6] Liste L17ebc vom 17.Feb 2010
[L7] Liste L80e der genormten Vertikalen von Winkel-Praesudokus, Feb 2010
[A7a] Quellbilder vom R–Typ der Liste L24eee(1) , Nov 2009/Aug 2010
[A7b] Quellbilder der dbn-Superfixe U_1, U_2, U_3, U_4 , Dez 2009/Aug 2010
[A7c] Die Fixsudokus vom RS–Typ der Liste L36eee , Dez 2009/Sep 2010
[A11] Fixsudokus vom RSS–Typ , Feb 2010/Aug 2010
[A12] Fixsudokus vom R–Typ , Feb 2010/Aug 2010
[B1, B2] Präsudokubäume AS und FO, Feb 2010
[B1] Genus Praesudoku-Baum A.S. mit 40 Früchten vom RSS–Typ, Feb 2910
[B2] Genormter Praesudoku-Baum mit 80 Früchten in Wolframs Garten, Feb 2010

Literatur Es sind bis auf [15] unveröffentlichte Darlegungen, die durch [1] und interne Diskussionen angeregt wurden.
[1] Wolfram Jehne, *Zur mathematischen Theorie der Sudokus. Ein Entwurf* , Manuskript, Köln, Juni 2008
[2] Arnold Schönhage, *Programme zur Fortsetzung von Diagonalblöcken,* Manuskript, Bonn,. Aug 2008
[3] Arnold Schönhage, *Ein Algorithmus zum Erkennen von Fixsudokus,* Manuskript, Bonn,. Aug/Dez 2008
[4] Arnold Schönhage, *Kleine Studie zu Wolfram Jehne's 84-ten Geburtstag*, Manuskript, Bonn, Feb 2010
[5] Arnold Schönhage, *Vergleich zweier Sudokus auf Isomorphie*, Manuskript, Bonn, April 2010
[6] Fritz Ostermann, *Superfix-Sudokus*, Manuskript, Köln, 30 . Dez 2008
[7a] Fritz Ostermann, *Quellbilder der Fixsudokus aus Liste 24eee vom σ–Typ* , Manuskript, Köln,28. Nov 2009
[7b] Fritz Ostermann, *Quellbilder der diagonalblocknormierten Superfixe* , Manuskript, Köln, 1. Dez 2009
[7c] Fritz Ostermann, *Darstellung diagonalblocknormierter $\sigma{\cdot}\sigma°$–Sudokus*, Manuskript, Köln, 9. Dez 2009
[8] Fritz Ostermann, *Sud-Theorie(1)* , Manuskript, Köln, 27.Dez 2009
[9a] Fritz Ostermann, Praesudokus oberster Zweig der 4 Äste, Köln 02.Feb 2010
[9b] Fritz Ostermann, *LIste der genormten Vertikalen von Winkel-Praesudokus*t, Köln 06.Feb 2010
[10] Fritz Ostermann, *Die Fixsudokus auf den Schemata*, Manuskript, Köln 15.Feb 2010
[11] Fritz Ostermann, *Fixsudokus vom $\sigma{\cdot}\sigma\sigma$–Typ*, Manuskript, Köln 20.Feb 2010
[12] Fritz Ostermann, *Fixsudokus vom σ–Typ*, Manuskript, Köln 24.Feb 2010
[13] Fritz Ostermann, *Zählsystem für e- normierte Praesudokus einer Winkelfigur*. Manuskript, Köln, 2.März2010
[14] Fritz Ostermann, *Anzahlen der G-Bahnen*, Manuskript, Köln 15.März 2010
[15] Felgenhauer/Jarvis, *Enumering possible Sudoku grids.*, Internet, Dresden/Shelfield, June 20 2005

Nachtrag (Dez 2010)

Vom Anhang befinden sich die Artikel: [L2] und [A7c] als doc-files auf der homepage und sind durch die ‚links' „L36eee" bzw. „Fixsudokus der Liste L36eee" abrufbar.
Die Anhänge [L7] und [B1,B2] sind in [A7c] enthalten.
Einblick in andere Beiträge des Anhangs kann durch eine e-mail an mich bewirkt werden.
Vorbereitet ist eine CD mit dem Manuskript und sämtlichen Dokumenten des Anhangs, ca. 3,5 MB, die ich nach Überweisung eines Unkostenbeitrags von 4,00 EUR portofrei zusende. Ein Überweisungs-Konto wird dann genannt.

Files der CD 'FS Dez 2010'	ca. 3,5 MB
Die Fixsudokus der Sudokugruppe, Sep 2010	330 KB
Anhang	
[L1] Liste L4eee vom Aug/Dez 2008	93 KB
[L2] Liste L36eee vom 9.Nov 2009	33 KB
[L3] Liste rs36rss vom 14.Febr. 2010	57 KB
[L4] Liste L24eee vom 21.Nov 2009	256 KB
[L5] Liste L261ebc vom 21.Dez 2008	308 KB
[L6] Liste L17ebc vom 17.Feb 2010	27 KB
[L7] Liste L80e d . genorm. Vertikalen von Winkel-Praesud., Feb 2010	656 KB
[A7a] Quellbilder vom R–Typ der Liste L24eee(1) , Nov 2009/Aug 2010	111 KB
[A7b] Quellbilder der dbn-Superfixe U_1,U_2,U_3,U_4 , Dez 2009/Aug 2010	133 KB
[A7c] Die Fixsudokus der Liste L36eee , Dez 2009/Sep 2010	947 KB
[A11] Fixsudokus vom RSS–Typ , Feb 2010/Aug 2010	92 KB
[A12] Fixsudokus vom R–Typ , Feb 2010/Aug 2010]	90 KB
[B1,B2] Präsudokubäume AS und FO, Feb 2010	207 KB
[B1] Genus Praesudoku-Baum A.S. mit 40 Früchten vom RSS–Typ	143 KB
[B2] Genorm. Praesudoku-Baum mit 80 Früchten in Wolframs Garten	143 KB

B1,B2 sind jpg-files, die zuvor genannten 14 Files sind doc-files
Label-file der CD ‚FS Dez 2010' 21 KB

Literatur-Hinweis (Jan 2011)

Auf der *Homepage Arnold Schönhage* unter der Internet-Adresse
http://www.iai.uni-bonn.de/~schoe/
findet man in Miscellanea: Sudoku
im pdf-Format Arnold Schönhages Artikel
SUDOC2 --- Grundlagen zum Sudoku-Programm. Jan 2007
Einige Sudoku-Studien, Dezember 2010, 25 Seiten.