Die Fixsudokus der Liste $L36_{eee}$

Anhang [A7c] zum Skript „Die Fixsudokus der Sudokugruppe“
Fritz Ostermann, Nov 2009 / Febr/Sept 2010

Bei der Zählung aller Fixsudokus der Fixgruppe G fand Arnold Schönhage nach der in [3] beschriebenen Methode:
1 Bezirk mit 1 Tripel, dessen Leader -das (e,e,e)-Tripel- hatte 64 Fortsetzungen zum Fixsudoku,
1 Bezirk mit 12 Tripeln, dessen Leader hatte 26 Fortsetzungen zum Fixsudoku,
1 Bezirk mit 12 Tripeln, dessen Leader hatte 17 Fortsetzungen zum Fixsudoku,
19 Bezirke mit insgesamt 2578 Tripeln, deren Leader hatten 16 Fortsetzungen zum Fixsudoku,
383 Bezirke mit insgesamt 139 932 Tripeln, deren Leader hatten 8 Fortsetzungen zum Fixsudoku,
insgesamt zählte er also 1+1+1+19+383=405 Bezirke, die zusammengenommen
1+12+12+2578+139932= 142535 dbn-Tripel (e,b,c) alias „Hausnummern“ umfassen.
Unter den $nn_0 = 2^9 \cdot p$, p=27704 267971, dbn-Sudokus wurden damit entdeckt und gezählt
$nn_f = 1\cdot 64 + 12\cdot 26 + +12\cdot 17 + 2578\cdot 16 + 139932\cdot 8 = 1\,161284 = 4\cdot 41\cdot 73\cdot 97$ Fixsudokus, darunter die $n_{e,sf} = 4$ e-normierten Superfixe U_1, U_2, U_3, U_4 . Sein Pentium-4 schaffte es in ca. 12 Minuten.

Zu den insgesamt 64 Fortsetzungen des (e,e,e)-Tripels zum Fixsudoku hat Arnold Schönhage im Dez 2008 die Liste $L4_{eee}$, am 21. Nov 2009 die Liste $L24_{eee}$ und zuvor am 9. Nov 2009 die Liste $L36_{eee}$ erstellt.
Die vier Fortsetzungen der Blockdiagonalen (e,e,e) in Liste L4eee sind die im Anhang [A7b] betrachteten Superfixe U_1, U_2, U_3, U_4 .
Die 12 normalen Fixsudokus vom R–Typ unter den 24 Fortsetzungen der Blockdiagonale (e,e,e) sind die im Anhang [A7a] betrachteten normalen Fixsudokus A_i , $i \in \{1,2,3,...,12\}$. Deren e-normierten Quellbilder A_i^* haben in der Blockdiagonalen Blöcke b’, c’ der Form b’=rr e, c’=r e oder b’=r e, c’=rr e.
Für die restlichen 12 normalen Fixsudokus vom S–Typ der Liste $L24_{eee}$ gilt Analoges mit b’=ss e, c’=s e oder b’=s e, c’=ss e .
Die 36 Fortsetzungen der Liste $L36_{eee}$ sind Sudokus, deren Fixgruppe durchweg $\{1, R\cdot S, RR\cdot SS\}$ ist, wir notieren sie S_n, $n \in \{1,2,3,...,36\}$, gemäß ihrer Position auf der Liste.
In der Liste rs36rss [L3] sind sie F_n , $n \in \{0,1,2,...,35\}$, notiert, um eine Verwechselung mit den Operatoren $S_1, S_2, S_3 \in G_0$ auszuschließen, die jedoch hier vom Kontext her kaum zu erwarten.
Gemäß ihrer Gestalt und Fixgruppe sind die S_n e-normierete normale Fixsudokus vom RS–Typ mit reduzierten Fixoperatoren.
Liste $L36_{eee}$ enthält alle e-normierten normalen Fixsudokus mit reduziertem Fixoperator vom RS–Typ.
In den Skripten [4] sowie [13] wurden ihre e-normierten Vertikalen kombinatorisch in elementarer Weise erzeugt. Liste L80e [L7] auf Seite 7 sowie die zwei Bilder [B1],[B2] auf Seite 8 zeigen logische Entscheidungsbäume. Zudem sind in L80e die Vertikalen gruppiert aufgelistet.
Die Anzahl 36 ist im allgemeinem Sachverhalt zum RS–Typ begründet.

RS–Typ

Jedes $A \in X$ mit dem Fixoperator $\varphi = g_1\cdot g_2\cdot g_3 \cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3 \cdot R\cdot S \in G_0$
lässt sich in Blockschreibweise in folgender Form darstellen:

$$A = \begin{pmatrix} a & g_1\cdot g_3\cdot h_2\cdot h_1 c & g_1\cdot h_3 b \\ g_2\cdot g_1\cdot h_1\cdot h_3 b & g_2\cdot h_2 a & c \\ g_3\cdot h_1 c & b & g_3\cdot g_2\cdot h_3\cdot h_2 a \end{pmatrix}, \text{ wobei}$$

$$g_3\cdot g_2\cdot g_1 = 1 \text{ und } h_3\cdot h_2\cdot h_1 = 1.$$

Das durch $w = 1\cdot(g_1\cdot g_3)\cdot g_1 \cdot 1\cdot(h_1\cdot h_3)\cdot h_1 \in T(r)xT(s)$ transformierte Sudoku A’=wA hat den rein globalen Fixoperator $\varphi' = w\cdot\varphi\cdot w^{-1} = R\cdot S$.
Substituiert man $b' = g_1\cdot h_1\cdot h_3\, b$, $c' = g_1\cdot g_3\cdot h_1\, c$ im Fixsudoku A’=wA , ergibt sich für A’ die Darstellung

$$A^* = \begin{pmatrix} a & c' & b' \\ b' & a & c' \\ c' & b' & a \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist $\varphi^* = R\cdot S$ ein Fixoperator eines jeden Sudokus A* in dieser reduzierten RS–Form.
Die Darstellungsform A* ist Quelle eines jeden Fixsudokus A vom RS–Typ, denn die Transformation eines A* mit dem Fixoperator $\varphi^* = R\cdot S$ mittels eines beliebigen $w' = u_1\cdot u_2\cdot u_3\cdot v_1\cdot v_2\cdot v_3 \in T(r)\, xT(s)$ ergibt ein Sudoku w’A* mit dem Fixoperator $\varphi = w'\cdot\varphi^*\cdot(w')^{-1}$, ist also vom RS–Typ, und hat somit ein Bild in der reduzierten Form.

Blockdarstellungen der Fixsudokus von Liste L36$_{eee}$

$$S_1 = \begin{pmatrix} e & rr\cdot ssc & r\cdot sb \\ r\cdot sb & e & rr\cdot ssc \\ rr\cdot ssc & r\cdot sb & e \end{pmatrix},\ S_{36} = \begin{pmatrix} e & r\cdot sb & rr\cdot ssc \\ rr\cdot ssc & e & r\cdot sb \\ r\cdot sb & rr\cdot ssc & e \end{pmatrix},$$

$$\text{wobei } e=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ sowie } b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix} = b_1,\ c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 8 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 9 \end{pmatrix} = c_1 .$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} e & rr\cdot ssc & r\cdot sb \\ r\cdot sb & e & rr\cdot ssc \\ rr\cdot ssc & r\cdot sb & e \end{pmatrix},\ S_{35} = \begin{pmatrix} e & r\cdot sb & rr\cdot ssc \\ rr\cdot ssc & e & r\cdot sb \\ r\cdot sb & rr\cdot ssc & e \end{pmatrix},$$

$$\text{wobei } b = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 9 \end{pmatrix} = b_2,\ c = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 8 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix} = c_2 .$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} e & rr\cdot sc & r\cdot ssb \\ r\cdot ssb & e & rr\cdot sc \\ rr\cdot sc & r\cdot ssb & e \end{pmatrix},\ S_{34} = \begin{pmatrix} e & r\cdot ssb & rr\cdot sc \\ rr\cdot sc & e & r\cdot ssb \\ r\cdot ssb & rr\cdot sc & e \end{pmatrix},$$

$$S_{15} = \begin{pmatrix} e & r\cdot sc & rr\cdot ssb \\ rr\cdot ssb & e & r\cdot sc \\ r\cdot sc & rr\cdot ssb & e \end{pmatrix},\ S_{22} = \begin{pmatrix} e & rr\cdot ssb & r\cdot sc \\ r\cdot sc & e & rr\cdot ssb \\ rr\cdot ssb & r\cdot sc & e \end{pmatrix},$$

$$\text{wobei } b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix} = b_3,\ c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix} = c_3 .$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} e & rr\cdot ssc & r\cdot sb \\ r\cdot sb & e & rr\cdot ssc \\ rr\cdot ssc & r\cdot sb & e \end{pmatrix},\ S_{33} = \begin{pmatrix} e & r\cdot sb & rr\cdot ssc \\ rr\cdot ssc & e & r\cdot sb \\ r\cdot sb & rr\cdot ssc & e \end{pmatrix},$$

$$S_{16} = \begin{pmatrix} e & r\cdot ssc & rr\cdot sb \\ rr\cdot sb & e & r\cdot ssc \\ r\cdot ssc & rr\cdot sb & e \end{pmatrix},\ S_{21} = \begin{pmatrix} e & rr\cdot sb & r\cdot ssc \\ r\cdot ssc & e & rr\cdot sb \\ rr\cdot sb & r\cdot ssc & e \end{pmatrix},$$

$$\text{wobei } b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = b_4,\ c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = c_4 .$$

$$S_5 = \begin{pmatrix} e & rr\cdot sc & r\cdot ssb \\ r\cdot ssb & e & rr\cdot sc \\ rr\cdot sc & r\cdot ssb & e \end{pmatrix},\ S_{32} = \begin{pmatrix} e & r\cdot ssb & rr\cdot sc \\ rr\cdot sc & e & r\cdot ssb \\ r\cdot ssb & rr\cdot sc & e \end{pmatrix},$$

$$S_{17} = \begin{pmatrix} e & r\cdot sc & rr\cdot ssb \\ rr\cdot ssb & e & r\cdot sc \\ r\cdot sc & rr\cdot ssb & e \end{pmatrix},\ S_{20} = \begin{pmatrix} e & rr\cdot ssb & r\cdot sc \\ r\cdot sc & e & rr\cdot ssb \\ rr\cdot ssb & r\cdot sc & e \end{pmatrix},$$

$$\text{wobei } b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix} = b_5,\ c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix} = c_5 .$$

$$S_6 = \begin{pmatrix} e & r \cdot ssc & rr \cdot sb \\ rr \cdot sb & e & r \cdot ssc \\ \text{´}r \cdot ssc & rr \cdot sb & e \end{pmatrix}, \; S_{31} = \begin{pmatrix} e & rr \cdot sb & r \cdot ssc \\ r \cdot ssc & e & rr \cdot sb \\ rr \cdot sb & r \cdot ssc & e \end{pmatrix},$$

$$S_{23} = \begin{pmatrix} e & r \cdot sc & rr \cdot ssb \\ rr \cdot ssb & e & r \cdot sc \\ r \cdot sc & rr \cdot ssb & e \end{pmatrix}, \; S_{14} = \begin{pmatrix} e & rr \cdot ssb & r \cdot sc \\ r \cdot sc & e & rr \cdot ssb \\ rr \cdot ssb & r \cdot sc & e \end{pmatrix},$$

$$\text{wobei } b = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} = b_6 , \; c = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix} = c_6 .$$

$$S_7 = \begin{pmatrix} e & rr \cdot ssc & r \cdot sb \\ r \cdot sb & e & rr \cdot ssc \\ rr \cdot ssc & r \cdot sb & e \end{pmatrix}, \; S_{30} = \begin{pmatrix} e & r \cdot sb & rr \cdot ssc \\ rr \cdot ssc & e & r \cdot sb \\ r \cdot sb & rr \cdot ssc & e \end{pmatrix},$$

$$\text{wobei } b = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix} = b_7 , \; c = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix} = c_7 .$$

$$S_8 = \begin{pmatrix} e & rr \cdot ssc & r \cdot sb \\ r \cdot sb & e & rr \cdot ssc \\ rr \cdot ssc & r \cdot sb & e \end{pmatrix}, \; S_{29} = \begin{pmatrix} e & r \cdot sb & rr \cdot ssc \\ rr \cdot ssc & e & r \cdot sb \\ r \cdot sb & rr \cdot ssc & e \end{pmatrix},$$

$$S_{24} = \begin{pmatrix} e & rr \cdot sc & r \cdot ssb \\ r \cdot ssb & e & rr \cdot sc \\ rr \cdot sc & r \cdot ssb & e \end{pmatrix}, \; S_{13} = \begin{pmatrix} e & r \cdot ssb & rr \cdot sc \\ rr \cdot sc & e & r \cdot ssb \\ r \cdot ssb & rr \cdot sc & e \end{pmatrix},$$

$$\text{wobei } b = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & 9 \end{pmatrix} = b_8 , \; c = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 7 & 2 & 9 \end{pmatrix} = c_8 .$$

$$S_9 = \begin{pmatrix} e & r \cdot ssc & rr \cdot sb \\ rr \cdot sb & e & r \cdot ssc \\ r \cdot ssc & rr \cdot sb & e \end{pmatrix}, \; S_{28} = \begin{pmatrix} e & rr \cdot sb & r \cdot ssc \\ r \cdot ssc & e & rr \cdot sb \\ rr \cdot sb & r \cdot ssc & e \end{pmatrix},$$

$$S_{25} = \begin{pmatrix} e & r \cdot sc & rr \cdot ssb \\ rr \cdot ssb & e & r \cdot sc \\ r \cdot sc & rr \cdot ssb & e \end{pmatrix}, \; S_{12} = \begin{pmatrix} e & rr \cdot ssb & r \cdot sc \\ r \cdot sc & e & rr \cdot ssb \\ rr \cdot ssb & r \cdot sc & e \end{pmatrix},$$

$$\text{wobei } b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix} = b_9 , \; c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} = c_9 .$$

$$S_{10} = \begin{pmatrix} e & rr \cdot sc & r \cdot ssb \\ r \cdot ssb & e & rr \cdot sc \\ rr \cdot sc & r \cdot ssb & e \end{pmatrix}, \; S_{27} = \begin{pmatrix} e & r \cdot ssb & rr \cdot sc \\ rr \cdot sc & e & r \cdot ssb \\ r \cdot ssb & rr \cdot sc & e \end{pmatrix},$$

$$\text{wobei } b = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = b_{10} , \; c = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 6 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix} = c_{10} .$$

$$S_{11} = \begin{pmatrix} e & rr\cdot sc & r\cdot ssb \\ r\cdot ssb & e & rr\cdot sc \\ rr\cdot sc & r\cdot ssb & e \end{pmatrix},\; S_{26} = \begin{pmatrix} e & r\cdot ssb & rr\cdot sc \\ rr\cdot sc & e & r\cdot ssb \\ r\cdot ssb & rr\cdot sc & e \end{pmatrix},$$

$$\text{wobei } b = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} = b_{11},\; c = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} = c_{11}.$$

$$S_{18} = \begin{pmatrix} e & r\cdot ssc & rr\cdot sb \\ rr\cdot sb & e & r\cdot ssc \\ r\cdot ssc & rr\cdot sb & e \end{pmatrix},\; S_{19} = \begin{pmatrix} e & rr\cdot sb & r\cdot ssc \\ r\cdot ssc & e & rr\cdot sb \\ rr\cdot sb & r\cdot ssc & e \end{pmatrix},$$

$$\text{wobei } b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix} = b_{18},\; c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 6 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix} = c_{18}.$$

Abhängig vom Blockoperator $r\cdot s$, $rr\cdot s$, $r\cdot ss$, $rr\cdot ss$ vor dem Block b bzw. c im Rasterfeld $A_{2,1}$ und damit abhängig von der Position der Ziffer 1 im Block b' im Feld $A_{2,1}$ zerfällt die Menge $Q=\{S_n\,;\, n=1,2,3,...,36\}$ der 36 e-normierten reduzierten Fixsudokus S_n vom RS–Typ in die vier Teilmengen $Q1 = \{S_1,S_2,S_4, S_7,S_8,S_{12},S_{14},S_{20},S_{22}\}$, $Q2 = \{S_6,S_9,S_{13},S_{16},S_{18},S_{26},S_{27},S_{32},S_{34}\}$, $Q3 = \{S_3,S_5,S_{10},S_{11},S_{19},S_{21},S_{24},S_{28},S_{31}\}$, $Q4 = \{S_{15},S_{17},S_{23},S_{25},S_{29},S_{30},S_{33},S_{35},S_{36}\}$.

Strukturierung der Liste $L36_{eee}$

Mit dem globalen Operator $\theta_1 = R_1\cdot S_1$ lassen sich folgende Abhängigkeiten notieren:
$S_{36}= \theta_1(S_1)$, $S_{35}= \theta_1(S_2)$, $S_{30}= \theta_1(S_7)$, $S_{27}= \theta_1(S_{10})$, $S_{26}= \theta_1(S_{11})$, $S_{18}= \theta_1(S_{19})$ sowie
$S_{15}= \theta_1(S_{22})$ und $S_{34}= \theta_1(S_3)$, $S_{33}= \theta_1(S_4)$ und $S_{16}= \theta_1(S_{21})$, $S_{17}= \theta_1(S_{20})$ und $S_{32}= \theta_1(S_5)$,
$S_{23}= \theta_1(S_{14})$ und $S_6= \theta_1(S_{31})$, $S_{29}= \theta_1(S_8)$ und $S_{13}= \theta_1(S_{24})$, $S_{25}= \theta_1(S_{12})$ und $S_9= \theta_1(S_{28})$.
Zudem ergeben sich Verbindungen der Sudokus aus den Mengen Q2, Q3, Q4 mit jenen von Q1 durch die Operatoren $\alpha_2 = \pi_2\otimes r_1\cdot r_1\cdot r_1$ mit $r_1\cdot r_1\cdot r_1 \in T(r)=T_1(r)xT_2(r)xT_3(r)$ und $\pi_3 =(47)(58)(69)\in Z$,
$\alpha_3 = \pi_3\otimes s_1\cdot s_1\cdot s_1$ mit $s_1\cdot s_1\cdot s_1 \in T(s)=T_1(s)xT_2(s)xT_3(s)$ und $\pi_3 =(23)(56)(89)\in Z$,
$\alpha_4 = \pi_4\otimes r_1\cdot r_1\cdot r_1\cdot s_1\cdot s_1\cdot s_1$ mit $r_1\cdot r_1\cdot r_1\cdot s_1\cdot s_1\cdot s_1\in T(r)xT(s)$ und $\pi_4 =(23)(47)(59)(68)\in Z$,
also Operatoren aus dem direkten Produkt G*=ZxG der Zifferngruppe Z mit der Sudokugruppe G, dem zufolge die 36 Sudokus der Menge Q sich in einer 4x9 Matrix anordnen lassen.
Die Liste L80e [L7] der genormten Vertikalen von Winkel-Praesudokus zeigt es unter Einbezug der Superfixe U_1,U_2,U_3,U_4 mit deren Vertikalstreifen $V_{U1}(e,r\cdot se,rr\cdot sse)$, $V_{U2}(e, rr\cdot sse,r\cdot s\, e)$, $V_{U3}(e,rr\cdot se,r\cdot sse)$, $V_{U4}(e,r\cdot sse, rr\cdot se)$ durch vier Äste **A1**, **A2**, **A3**, **A4** (Kolonnen] und zehn Reihen.
Ziffer 1 variiert im Süd-Ost-Quadrat von b' in der Reihenfolge $\begin{Bmatrix} 1 & x \\ x & x \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} x & x \\ 1 & x \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} x & 1 \\ x & x \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} x & x \\ x & 1 \end{Bmatrix}$.
Die vier Superfixe in vorletzter Zeile sind in der Reihenfolge U_1,U_3,U_4,U_2 notiert.
In transponierter Form hat Liste L80e (Seite 7) folgende Gestalt:
A1 = (S_2, S_7 , S_8, S_{14}, S_{12} , S_{22}, S_4, S_{20} , U_1, S_1) ,
A2 = (S_{27}, S_{26}, S_{13}, S_6, S_9, S_{34}, S_{32}, S_{16} ,U_3, S_{18}) ,
A3 = (S_{10}, S_{19} ,S_{28}, S_{31}, S_{24} , S_3, S_{21}, S_5 , U_4, S_{11}) ,
A4 = (S_{35}, S_{36} ,S_{25}, S_{23}, S_{29} , S_{15}, S_{17}, S_{33} ,U_2, S_{30}) .

Jedes Sudoku im Ast **A1**, wir schreiben es $A_{1,k}$, $k\in\{1,2,3,...,10\}$, ist durch seinen e-normierten Vertikalstreifen (e, $b'_{1,k}$, $c'_{1,k}$) eindeutig festgelegt und die Streifen repräsentieren Entscheidungslinien zur Konstruktion der Blöcke $b'_{1,k}$, $c'_{1,k}$ gemäß [4], [13]. Entsprechendes gilt für die Sudokus in den Ästen **A2, A3, A4** , die wir dem Matrixschema gemäß analog $A_{2,k}$, $A_{3,k}$ $A_{4,k}$, $k\in\{1,2,3,...,10\}$, notieren.
Im Matrixschema untereinander liegende Sudokus sind nach [9a, Präsudokus oberster Zweig der 4 Äste] durch Transformation des Sudokus im Ast **A1** in folgender Weise verbunden:
$A_{2,k} =\alpha_2\; A_{1,k}$, $A_{3,k} =\alpha_3\; A_{1,k}$, $A_{4,k} =\alpha_4\; A_{1,k}$, $k\in\{1,2,3,...,10$
Demnach ist beispielsweise $S_{27} = \alpha_2\, S_2$ sowie $S_{10} = \alpha_3\, S_2$ und $S_{35} = \alpha_4\, S_2$.
In $S_{27} = \pi_2\otimes r_1\cdot r_1\cdot r_1\, S_2$ tauscht $r_1\cdot r_1\cdot r_1 \in T(r)$ die Zeilen 2 und 3 in jedem der Blöcke e, b', c' des Vertikalstreifens des Sudokus S_2 und durch die Ziffernpermutation π_2=(47)(58)(69) wird der transformierte Block $r_1\cdot r_1\cdot r_1$ e dann renormiert auf e. Die Entscheidungslinie, die zum Block b' in S_2 führte, ist damit auf den entsprechenden Block in S_{27} übertragen, in welchem die Ziffer 1 von Position (2,2) in b' in Position (3,2) verlagert ist. Analog wird in $S_{10} = \alpha_3\, S_2$ und in $S_{35} = \alpha_4\, S_2$ die Entscheidungslinie von S_2 nach S_{10} bzw. S_{35} übertragen.

Den zehn in [4], [13] dargestellten Entscheidungslinien zur Erstellung der Sudokus im Ast **A1** korrespondieren also anhand der Operatoren $\alpha_2=\pi_2\otimes r_1\cdot r_1\cdot r_1$ $\alpha_3=\pi_3\otimes s_1\cdot s_1\cdot s_1$, $\alpha_4=\pi_4\otimes r_1\cdot r_1\cdot r_1\cdot s_1\cdot s_1\cdot s_1$ jeweils 10 analoge Entscheidungslinien Linien für die Sudokus der Äste **A2, A3, A4.**
Abhängig von der Anordnung der Sudokus in **A1** sind auf diese Weise die Sudokus in den Ästen **A2, A3, A4** der Liste L80e aufgereiht.

In folgender Tabelle ist der durch die drei Operatoren α_2 , α_3 , α_4 bewirkte Zusammenhang zwischen den Sudokus der Listen $L4_{eee}$ und $L36_{eee}$ zusammengestellt. Darin sind zudem die Vorfaktor freien Blöcke b, c angegeben, die in den Sudokus einer Gruppierung vorkommen.

Lf.Nr	Gabel **A1**	Gabel **A2**	Gabel **A3**	Gabel **A4**	Blöcke b, c
		$\alpha_2=\pi_2\otimes r_1\cdot r_1\cdot r_1$	$\alpha_3=\pi_3\otimes s_1\cdot s_1\cdot s_1$	$\alpha_4=\pi_4\otimes r_1\cdot r_1\cdot r_1\cdot s_1\cdot s_1\cdot s_1$	
		π_2 =(47)(58)(69)	π_3 =(23)(56)(89)	π_4 =(23)(47)(59)(68)	
1	S_2	S_{27}	S_{10}	S_{35}	b_2 , b_{10} , c_2 , c_{10}
2	S_7	S_{26}	S_{19}	S_{36}	b_1 , b_7 , b_{11} , b_{18} c_1 , c_7 , c_{11} , c_{18}
3	S_8	S_{13}	S_{28}	S_{25}	b_8 , b_9 , c_8 , c_9
4	S_{14}	S_6	S_{31}	S_{23}	b_6 , c_6
5	S_{12}	S_9	S_{24}	S_{29}	b_8 , b_9 , c_8 , c_9
6	S_{22}	S_{34}	S_3	S_{15}	b_3 , c_3
7	S_4	S_{32}	S_{21}	S_{17}	b_4 , b_5 , c_4 , c_5
8	S_{20}	S_{16}	S_5	S_{33}	b_4 , b_5 , c_4 , c_5
9	U_1	U_3	U_4	U_2	e
10	S_1	S_{18}	S_{11}	S_{30}	b_1, b_7, b_{11}, b_{18}, c_1, c_7, c_{11}, c_{18}
Lf.Nr	1	2	3	4	

Es ist $\pi_4=\pi_2\cdot\pi_3$, $(\pi_2)^2=(\pi_3)^2=(\pi_4)^2 = 1$ und $(r_1\cdot r_1\cdot r_1)^2 = 1$, $(s_1\cdot s_1\cdot s_1)^2 = 1$ als auch $(r_1\cdot r_1\cdot r_1\cdot s_1\cdot s_1\cdot s_1)^2 = 1$.
Die Operatoren $\alpha_2=\pi_2\otimes r_1\cdot r_1\cdot r_1$ $\alpha_3=\pi_3\otimes s_1\cdot s_1\cdot s_1$, $\alpha_4=\pi_4\otimes r_1\cdot r_1\cdot r_1\cdot s_1\cdot s_1\cdot s_1$ bilden bei komponentenweiser Verkettung zusammen mit der Identität 1 die Gruppe $V_4=\{1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$.
Es ist ein Modell der Kleinschen Vierergruppe.

Die Operatoren von V_4 sind Operatoren auf der Menge $\mathbf{Q}=\{S_n , n\in\{1,2,3,...,36\}\}$.
Bringt man die durch $\theta_1=R_1\cdot S_1$ gegebenen Abhängigkeiten mit ein, kann man schreiben:
A1 = (S_2 , S_7 , S_8 , S_{14} , S_{12} , S_{22} , S_4 , S_{20} , U_1, S_1) ,
A2 = ($\theta_1(S_{10})$, $\theta_1(S_{11})$, $\theta_1(S_{24})$, $\theta_1(S_{31})$, $\theta_1(S_{28})$, $\theta_1(S_3)$, $\theta_1(S_5)$, $\theta_1(S_{21})$, $\theta_1(U_4)$, $\theta_1(S_{19})$),
A3 = (S_{10}, S_{19} , S_{28} , S_{31} , S_{24} , S_3, S_{21}, S_5 , U_4, S_{11}) ,
A4 = ($\theta_1(S_2)$, $S_{36}=\theta_1(S_1)$, $\theta_1(S_{12})$, $\theta_1(S_{14})$, $\theta_1(S_8)$, $\theta_1(S_{22})$, $\theta_1(S_{20})$, $\theta_1(S_4)$, $\theta_1(U_1)$, $\theta_1(S_7)$) .
Man erkennt Querverbindungen zwischen den Sudokus in den zehn Spalten.
Die Transformation $\theta_1=R_1\cdot S_1$ kommutiert mit den Transformationen α_2, α_3, α_4 und. zusammen bilden sie die Gruppe $D_8=\{1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \theta_1, \alpha_2\cdot\theta_1, \alpha_3\cdot\theta_1, \alpha_4\cdot\theta_1\}$.
Es ist ein Modell der Diedergruppe.

Basierend auf der Zifferngruppe Z , also der symmetrischen Gruppe der Ordnung 9, und der Sudokugruppe G hat Arnold Schönhage in [4] den Begriff der Isomorphie für Sudokus eingeführt.
Sudokus A, A' sind isomorph, wenn es einen Operator $\pi\cdot g\in Z\mathrm{x}G$ gibt, sodass $A'=\pi\cdot g(A)$ ist.
Wie man anhand obiger Auflistung leicht sieht, bilden sich in Bezug auf die Operatoren aus D_8 neben der Bahn der Superfixe folgende Bahnen isomorpher Sudokus in der Menge $\mathbf{Q}=\{S_1, S_2, S_3, ..., S_{36}\}$:
$B1(S_2)$ = $\{S_2, S_{27}, S_{10}, S_{35}\}$,
$B2(S_{14})$ = $\{S_{14}, S_6, S_{31}, S_{23}\}$,
$B3(S_{22})$ = $\{S_{22}, S_{34}, S_3, S_{15}\}$,
$B4(S_1)$ = $\{S_1, S_{18}, S_{11}, S_{30}, S_{19}, S_7, S_{26}, S_{36}\}$,
$B5(S_8)$ = $\{S_8, S_{13}, S_{28}, S_{25}, S_{24}, S_{12}, S_9, S_{29}\}$,
$B6(S_4)$ = $\{S_4, S_{32}, S_{21}, S_{17}, S_5, S_{20}, S_{16}, S_{33}\}$.

Für die Sudokus der Liste L80e haben sich also folgende Zusammenhänge ergeben:
Bahnen-Matrix der V_4 zum Leadersystem $A=Q\cup\{U_1\}$
A1 = (S_2, S_7 , S_8, S_{14}, S_{12} , S_{22}, S_4, S_{20} , U_1, S_1) ,
A2 = (S_{27}, S_{26}, S_{13}, S_6, S_9, S_{34}, S_{32}, S_{16} ,U_3, S_{18}) ,
A3 = (S_{10}, S_{19} ,S_{28}, S_{31}, S_{24} , S_3, S_{21}, S_5 , U_4, S_{11}),
A4 = (S_{35}, S_{36} ,S_{25}, S_{23}, S_{29} , S_{15}, S_{17}, S_{33} ,U_2, S_{30}) .

Transformations-Bilder von $\theta_1 = R_1 \cdot S_1$

A1 = (S_2 , S_7 , S_8 , S_{14} , S_{12} , S_{22} , S_4 , S_{20} , U_1, S_1) ,

A2 = ($\theta_1(S_{10})$, $\theta_1(S_{11})$, $\theta_1(S_{24})$, $\theta_1(S_{31})$, $\theta_1(S_{28})$, $\theta_1(S_3)$, $\theta_1(S_5)$, $\theta_1(S_{21})$, $\theta_1(U_4)$, $\theta_1(S_{19})$),

A3 = (S_{10}, S_{19} , S_{28} , S_{31} , S_{24} , S_3, S_{21}, S_5 , U_4, S_{11}) ,

A4 = ($\theta_1(S_2)$, $S_{36}=\theta_1(S_1)$, $\theta_1(S_{12})$, $\theta_1(S_{14})$, $\theta_1(S_8)$, $\theta_1(S_{22})$, $\theta_1(S_{20})$, $\theta_1(S_4)$, $\theta_1(U_1)$, $\theta_1(S_7)$) .

Bahnen der D_8 zum Leadersystem B={S_2, S_{14} , S_{22}, S_1, S_8, S_4, U_1}

B1 = (S_2, S_{27} , S_{10}, S_{35}) ,

B2 = (S_{14}, S_6 , S_{31}, S_{23}),

B3 = (S_{22}, S_{34} , S_3, S_{15}),

B4 = (S_1, S_{18} , S_{11}, S_{30}, S_7, S_{26} , S_{19}, S_{36}),

B5 = (S_8, S_{13} , S_{28}, S_{25}, S_{12}, S_9 , S_{24}, S_{29}),

B6 = (S_4, S_{32} , S_{21}, S_{17}, S_{20}, S_{16} , S_5, S_{33}),

B7 = (U_1, U_3 , U_4, U_2) .

Repräsentanten für reduzierte Sudokus vom RSS–Typ

Durch den Bezug der Sudokus in den Ästen **A2, A3, A4** durch die Operatoren α_2 , α_3 , $\alpha_4 \in V_4$ zum betreffenden Sudoku im Ast **A1** bilden die 10 Sudokus der Menge
A ={U_1, S_1, S_2, S_4, S_7, S_8, S_{12}, S_{14}, S_{20}, S_{22}} ein Repräsentantensystem aller Sudokus aus der Vereinigung der Listen $L4_{eee}$ und $L36_{eee}$.
Durch Tausch der Blockspalten 2 und 3 der Sudokus dieses Systems ergibt sich mit den transformierten Sudokus ein Repräsentantensystem
A' = {U'_1, S'_1, S'_2, S'_4, S'_7, S'_8, S'_{12}, S'_{14} , S'_{20}, S'_{22}} für 40 e-normierte Sudokus, die alle den reduzierten Fixoperator $\varphi^* = R{\cdot}SS$ haben. Tauscht man die Blockspalten 1 und 3, erhält man ein Repräsentantensystem für 40 Sudokus, deren Nebendiagonale vom Tripel (e,e,e) gebildet wird.
Entsprechend lässt sich durch Bezug auf die Operatoren von D_8 analog zum Leadersystem **B**={ U_1,S_2, S_{14} , S_{22}, S_1, S_8, S_4} ein System **B'**={ U'_1, S'_2, S'_{14} , S'_{22}, S'_1, S'_8, S'_4} erstellen.

Anzahlen e-normierter Fixsudokus vom RS–Typ

Nach [4] , [13] gibt es vier e-normierte reduzierte superfixe Sudokus mit Fixoperatoren von jedem Typ, alias 4 diagonalblocknormierte Superfixe, und wie oben dargelegt gibt es
$3{\cdot}(4+8) = 9{\cdot}12 = 36$ e-normierte reduzierte normale Fixsudokus mit einem Fixoperator vom RS–Typ, also gibt es 4+36 =40 Fixsudokus vom RS–Typ .
In T_{23}^*–Bahnen deren Leader Fixsudokus sind, wobei $T_{23}^* = \{1\}xT_2(r)xT_3(r)\ x\ \{1\}xT_2(s)xT_3(s)$, liegen nur e-normierte Fixsudokus . T_{23}^* operiert fixpunktfrei auf der Menge X aller e-normierten reduzierten Fixsudokus vom RS–Typ und es $\#\, T_{23}^* = 6^4$. Damit gibt es
$N_{e,sf} = 6^4 \cdot 4 = 3^4{\cdot}2^6 = 5\,184$ e-normierte Superfixe,
$N_{e,nf3} = 6^4 \cdot 36 = 3^6{\cdot}2^6 = 46\,656$ e-normierte normale Fixsudokus vom RS–Typ,
$N_{e,f3} = 6^4 \cdot 40 = 3^4{\cdot}2^7{\cdot}5 = 51\,840$ e-normierte Fixsudokus vom RS–Typ .

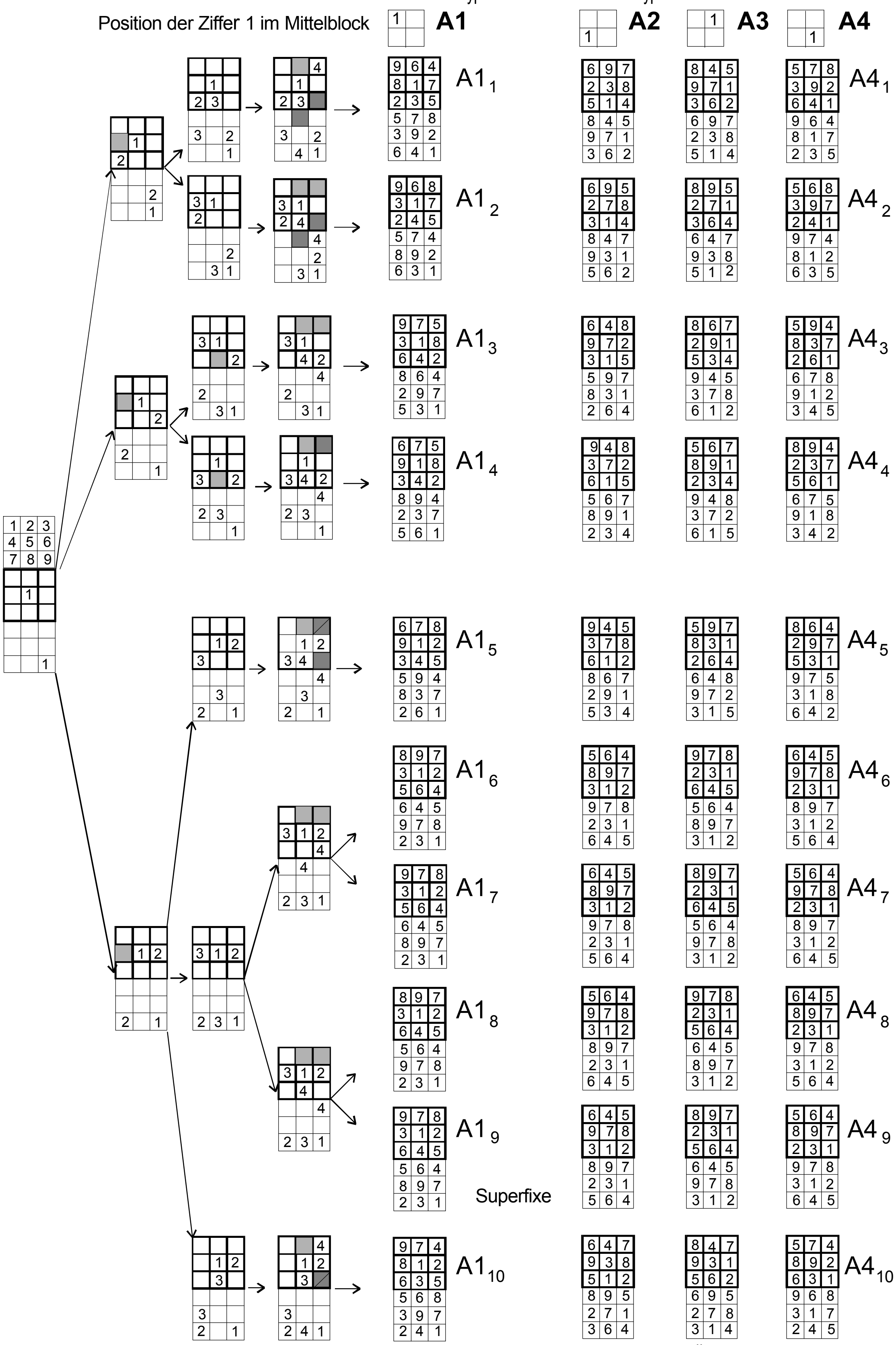
Analog ergeben sich die
Anzahlen e-normierter Fixsudokus vom RSS–Typ:
$N_{e,sf} = 6^4 \cdot 4 = 3^4{\cdot}2^6 = 5\,184$ e-normierte Superfixe,
$N_{e,nf4} = 6^4 \cdot 36 = 3^6{\cdot}2^6 = 46\,656$ e-normierte normale Fixsudokus vom RSS–Typ,
$N_{e,f4} = 6^4 \cdot 40 = 3^4{\cdot}2^7{\cdot}5 = 51\,840$ e-normierte Fixsudokus vom RSS–Typ .
Somit gibt es
$N_{e,f3,f4} = N_{e,f3} + N_{e,f4} = 6^4 \cdot 80 = 103\,680$ e-normierte Fixsudokus vom RS– oder RSS– Typ.
Durch Permutation der Ziffern im Normblock e erhält man alle Fixsudokus vom RS– bzw. RSS– Typ. Deren Anzahl ist also das 9!–fache der Anzahlen für e-normierte Fixsudokus. Damit gibt es
$N_{f3,f4} = N_{f3} + N_{f4} = 9! \cdot 6^4 \cdot 80 = 9! \cdot 103\,680$ Fixsudokus vom RS– oder RSS– Typ.

Sudokus vom RSS–Typ der Liste $L261_{ebc}$

Es ist {b_5,c_5} das einzige diagonalblocknormierte Paar unter den 12 Blockpaaren.
Die Fortsetzungen des diagonalblocknormierten Tripels (e,b_5,c_5) zu den normalen Fixsudokus F_{17} und F_{22} mit Fixoperatoren vom RSS–Typ aus Liste $L261_{ebc}$ vom 21.Dez 2008: vom RSS–Typ sind
$F_{17}=1{\cdot}rr{\cdot}r{\cdot}1{\cdot}s{\cdot}ss{\cdot}R_1(S_5) = 1{\cdot}rr{\cdot}r{\cdot}1{\cdot}ss{\cdot}s{\cdot}S_1(S_{32})$, $F_{22}=1{\cdot}r{\cdot}rr{\cdot}1{\cdot}s{\cdot}ss{\cdot}R_1(S_{17}) = 1{\cdot}r{\cdot}rr{\cdot}1{\cdot}s{\cdot}ss{\cdot}S_1(S_{20})$, wobei hier S_1 den globalen Operator notiert, der die Blockspalten 2 und 3 einander tauscht.

Liste L80e der genormten Vertikalen von Winkel-Praesudokus im Baum mit 4 Ästen

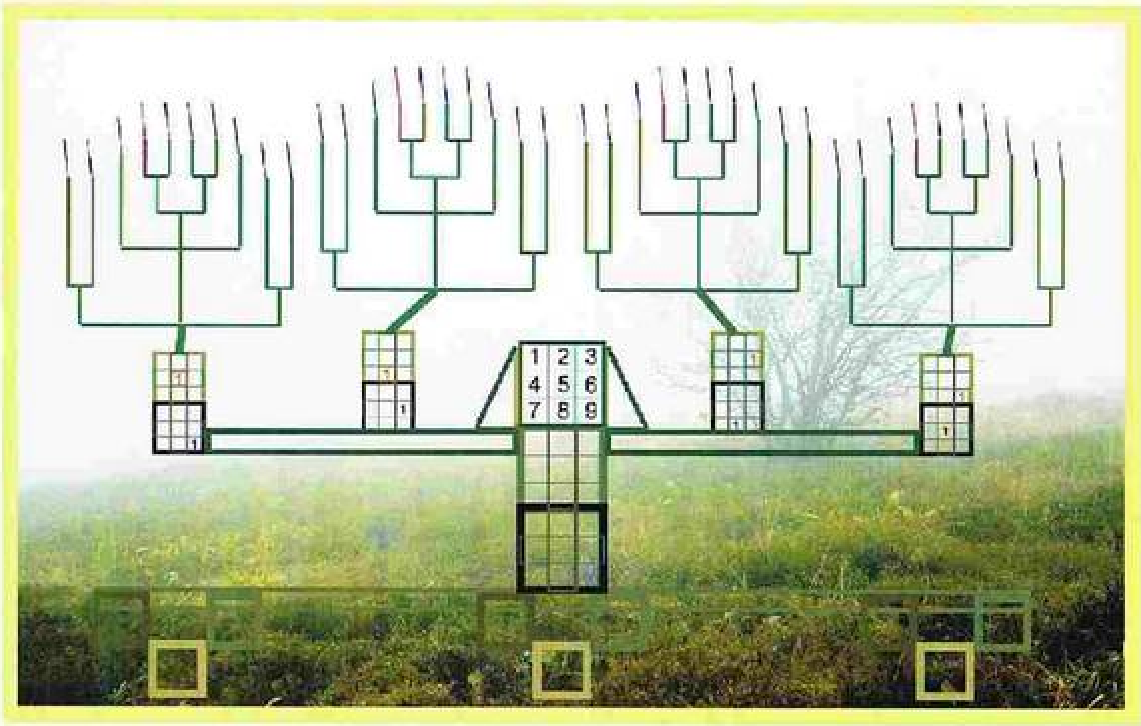
Jede Vertikale liefert ein reduziertes Fixsudoku ▪ vom RS –Typ und vom▪ RSS –Typ F.O. 06.02.2010



Die Anhänge [B1], [B2] zeigen bildhafte Darstellungen des Verzweigungsbaums mit 4 Ästen.

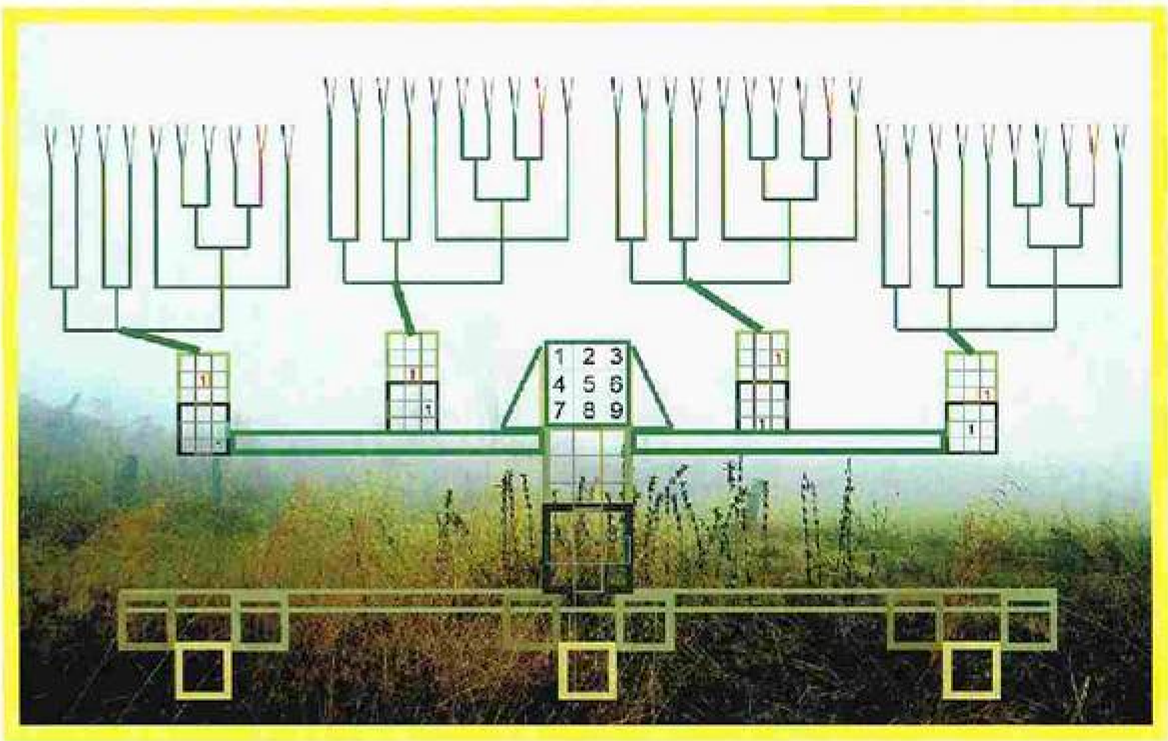
[B1] Verzweigungen bei der Konstruktion von A.S. für die 40 reduzierten Fixsudokus vom RSS–Typ

[B2] Verzweigungen bei der Konstruktion von F.O. für 80 reduzierten Fixsudokus vom RS– oder RSS–Typ



Genus Praesudoku-Baum A.S. mit 40 Früchten vom RSS-Typ

Verzweigungen bei der Konstruktion von A.S. für die 40 reduzierten Fixsudokus vom RSS-Typ



Genormter Praesudoku-Baum mit blockigen Wurzeln im gruppigen Boden und mit 80 Früchten in Wolframs Garten

Verzweigungen bei der Konstruktion von F.O. für 80 reduzierte Fixsudokus vom RS- oder RSS-Typ