Markoffketten-Variationen zum Würfelspiel „4 nach 2x2 gewinnt“

Ein Opus von Fritz Ostermann 15. Dez 2010

Eröffnung

Ein symmetrisches Polyeder mit n = 6 Flächen dient als Würfel.
Jeder Wurf fordert einen Chip und mit einer 4 nach zweimal 2 erwirbt man $7\cdot n$ =42 Chip
Im Spielablauf gibt es 6 Zustände.
‚Absorptionszustände' Z1, Z2, Z3. im Sinne von ‚Spiel aus'
Z1 = ‚Aus' nach 4 ohne 2x 2, Z2= ‚Aus' nach 2 bei 2x 2, Z3= ‚Aus' nach 4 bei 2x 2 .
‚Durchgangszustände' Z4, Z5, Z6 im Sinne von ‚Spiel ein'
Z4 = ‚Ein' mit 0x 2, Z5= ‚Ein' mit 1x 2, Z6= ‚Ein' mit 2x 2 .
Mit dem Übergang vom globalen Durchgangszustand ZD=Z4uZ5uZ6 in den globalen Absorptionszustand ZA=Z1uZ2uZ3 endet ein Spiel.
Man startet bei 0x 2. Man gewinnt in Z3.
Der Einstieg in Z4 beim Start erfolgt ohne Wurf.
Jeder Wurf ist ein Spielschritt mit dem Einsatz eb = 1 Chip.

Fundamentale Absorptions-Variation
Eine Matrix P erzeugt eine absorbierende Markoffkette.
Berechnet werden Wartezeiten, d.h. die mittlere Zahl der Schritte im Zustand ZD.
Der Einstieg ins Spiel zählt als Warteschritt mit, der Ausstieg nach ZA nicht.

Durchführung

Übergangswahrscheinlichkeit beim Wechsel zum jeweils erreichbaren Zustand ist p=1/n mit n=6.
Matrix P der Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i,j}$ von Z_i nach Z_j für $i,j\in\{1,2,3,4,5,6\}$ ist

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1-2\cdot p & p & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 1-2\cdot p & p \\ 0 & p & p & 0 & 0 & 1-2\cdot p \end{pmatrix} \text{ mit Teilmatrizen } I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R=\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \\ 0 & p & p \end{pmatrix},$$

$$Q=\begin{pmatrix} 1-2\cdot p & p & 0 \\ 0 & 1-2\cdot p & p \\ 0 & p & 1-2\cdot p \end{pmatrix} \text{ und der „Nullmatrix“ } O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ neben der Einheitsmatrix } I .$$

$R=(r_{i,j})$ für $i\in\{4,5,6\}$, $j\in\{1,2,3\}$ ist die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten von einem Durchgangszustand zu einem Absorptionszustand, Matrix $Q=(q_{i,j})$ für $i\in\{4,5,6\}$, $j\in\{4,5,6\}$ ist die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen Durchgangszuständen.

Ausgehend von der Wahrscheinlichkeits--Verteilung x_0=(0,0,0,1,0,0), die den sicheren Schritt von ZA nach Z4 beim Start eines Spiels beschreibt, ergibt sich rekursiv durch $x_{k+1}= x_k P$ für k=1,2,3,... eine absorbierende Markoffkette, die hier für k=25 bei p=1/6 auf drei Nachkommastellen gerundet die Verteilung x_{25}=(0.750, 0.125, 0.125, 0,0,0)) zeigt, was für $k\rightarrow\infty$ eine Grenz-Verteilung x_∞=(3/4,1/8,1/8,0,0,0) andeutet und damit die ‚Absorptionswkten 6/8, 1/8, 1/8 in den Zuständen Z1,Z2 bzw. Z3 vermuten lässt.

Die durch $s_{k+1} =s_k+x_k$ mit $s_0=x_0$ rekursiv definierte Folge $s_k=(s_{4,k}, s_{5,k}, s_{6,k})$ der aufsummierten Werte des hinteren Tripels x_k“ $=(x_{4,k}, x_{5,k}, x_{6,k})$ der in Tripel zerlegten Verteilungen $x_k =x_k' +x_k''$ ergibt sich nach dem Start mit dem Tripel x_0''= (1,0,0) mittels der Matrizen $N_k =I+Q+Q^2 +Q^3+... +Q^k$, den Partialsummen der von Q erzeugten ‚Fundamentalmatrix' $N= I+Q+Q^2 +Q^3+...$, also der summierten Treffen der Durchgangszustände Z4, Z5, Z6 , beginnend mit dem Einstieg in Z4 .
Für k=30 bei p=1/6 ist s_{30} =(3.000,1.500, 0.750), gerundet auf drei Nachkommastellen. Das lässt vermuten, dass im Mittel 3 Schritte in Z4, 1.5 Schritte in Z5 und 0.75 in Z6, insgesamt somit 3+1.5+0.75 = 5.25 Schritte in ZD erfolgen, bevor nach ZA gewechselt wird.
Die Koeffizienten von $N=(n_{i,j})$ für $i\in\{4,5,6\}$, $j\in\{4,5,6\}$ sind gemittelte Anzahlen der Schritte in den Durchgangszuständen bis zum Schritt nach ZA. Es sind ‚Wartezeiten' in den Zuständen von ZD bis zum Ausstieg nach ZA, abhängig vom Durchgangszustand, mit dem man startet und das Warten beginnt.

Die Fundamentalmatrix N ist als geometrische Reihe von Q die inverse Matrix von $I-Q$ .Damit ergibt sich $N=\begin{pmatrix} 1/(2\cdot p) & 1/(4\cdot p) & 1/(8\cdot p) \\ 0 & 1/(2\cdot p) & 1/(4\cdot p) \\ 0 & 0 & 1/(2\cdot p) \end{pmatrix}$ sowie deren Zeilensummen $\begin{matrix} t(4,3)=7/(8\cdot p) \\ t(5,3)=3/(4\cdot p) \\ t/6,3)=1/2\cdot p) \end{matrix}$.

Das vermutete Wartezeiten-Tripel (3 , 1.5 , 0.75) für p=1/6 beim Einstieg in Z4 ist damit bestätigt.
Das Matrizenprodukt $B= N\cdot R =(b_{i,j})$ für $i\in\{4,5,6\}$, $j\in\{1,2,3\}$ liefert die ‚Absorptions-wahrscheinlichkeiten der Zustände Z1, Z2, Z3 nach einem Start im Durchgangszustand Zi.

Es ist $B= N\cdot R =\begin{pmatrix} 3/4 & 1/8 & 1/8 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Damit ist das Verteilungstripel (0.75 , 0.125 , 0.125) für p=1/6 als Grenzverteilung nach dem Start in Z4 bestätigt.

Schlussakkord der fundamentalen Absorptionsvariation

Wartezeit in ZD bei p=1/n mit dem Einstieg beim Start in Z4 ist $t(4,3)= 7\cdot n / 8$
Absorptionswahrscheinlichkeit des Zustandes Z3 beim Ausstieg ist $b(4,3)= 1/8$
Der Ausstieg nach Z3 fordert im Mittel $z(4,3) = 1/b(4,3) = 8$ Spiele.
Die Anzahl der Schritte von ZA nach Z3 mit dem Einstieg in Z4 ist $z(4,3)\cdot (t(4,3)+1)= 7\cdot n + 8$.
Die Schrittzahl ohne Einstiegschritt mit dem Ausstieg nach Z3 ist $tw(4,3)= z(4,3) \cdot t(4,3)= 7 \cdot n$.
Der aufsummierte Ausstiegsschritt zählt als Wurf, der Einstiegsschritt nicht.
Von Z4 bis in Z3 erwartet man $7 \cdot n$ in ZD durch Wurf gestartete Schritte.
Jeder Wurf fordert eb= 1 Chip.
Bei p=1/n mit n=6 ist der Gewinnbetrag gb=tw(4,3) eb = 42 Chip fair .

Reguläre Variationen

Überleitung

Die absorbierende Matrix P wird abgewandelt in eine Matrix $P'=(p'_{i,j})$, die sich in den Positionen (1,1), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (3,4) von P unterscheidet. Die Wahrscheinlichkeit 1 in den Absorptionszuständen ist nach Z4 transferiert. Matrix P' erzeugt eine reguläre Markoffkette .
On the long run wird im Spiel von einem Zustand Zi jeder andere Zustand Zj erreicht, für die von P' erzeugte Kette gibt es eine eindeutig bestimmter stationäre Verteilung z=(z1,z2,z3,z4,z5,z6), dabei ist z P' = z und z1+z2+z3+z4+z5+z6 = 1 .

Stationär-reguläre Variation

Matrix der regulären Kette ist $P'(p'\,i,j) =\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1-2\cdot p & p & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 1-2\cdot p & p \\ 0 & p & p & 0 & 0 & 1-2\cdot p \end{pmatrix}$. für $i,j\in\{1,2,3,4,5,6\}$.

Ausgehend von der Wahrscheinlichkeits-Verteilung $x_0=(0,0,0,1,0,0)$, die den sicheren Schritt von ZA nach Z4 beim Start eines Spiels beschreibt, ergibt sich rekursiv durch $x_{k+1}= x_k P'$ für k=1,2,3,... eine reguläre Markoffkette, die hier für k=15 bei p=1/6 auf drei Nachkommastellen gerundet die Verteilung x_{15}=(0.120, 0.020, 0.020, 0.480, 0.240, 0.120)) zeigt, was für $k\to\infty$ eine Grenz-Verteilung x_∞=(6/50,1/50,1/50,24/50, 24/50, 12/50) vermuten lässt , die stationär ist und dem Verhältnis 6:1:1 zwischen den ‚Absorptionswahrscheinlichkeiten der Zustände Z1,Z2, Z3 entspricht.
Für die stationäre Verteilung z von P' ergeben sich durch z P' = z die Gleichungen
$2\cdot p\cdot z4 = zA$, $2\cdot z5 = z4$, $2\cdot z6 = z5$, wobei $zA=z1+z2+z3$ und $zA+zD=1$ mit $zD=z4+z5+z6$.
Das führt zu $2\cdot zD=7\cdot z5 = (7/2)\cdot z4$ und $zD= (7/4)\cdot z4$.
Es ist $1= zA+zD = (2\cdot p + 7/4)\cdot z4$ und damit $z4=4/(7+8\cdot p)$, woraus $z5=2/(7+8\cdot p)$, $z6=1/(7+8\cdot p)$ folgt.
Zufolge $z1=p\cdot(z4+z5)$, $z2=p\cdot z6$, $z3=p \cdot z6$ ist $z1=6\cdot p/(7+8\cdot p)$, $z2=z3=1\cdot p/(7+8\cdot p)$.
Die stationären Verteilungswerte für p=1/n mit n=6 sind somit, wie die Rechnung andeutete,
6/50 , 1/50 , 1/50 , 24/50 , 12/50 , 6/50 . Es ist $zA=8/(7\cdot n+8) =8/50$, $zD= 7\cdot n/(7\cdot n +8) = 42/50$.

Abklang der stationär-regulären Variation

Die stationären Verteilungswerte z1, z2, z3 stehen im Verhältnis 6:1:1
Das entspricht den Absorptionswahrscheinlichkeiten b(4,1)=6/8 b(4,2)=1/8, b(4,3)=1/8 .

Mit der Wahrscheinlichkeit $z6= n/(7\cdot n +8)$ ist man bei $p=1/n$ on the long run im Zustand Z6, im Mittel nach jeweils $1/z6 = (7\cdot n+ 8)/n$ Schritten. Davon erfolgen $az= zD\cdot 1/z6 = 7$ durch Würfe.
Mit der Wahrscheinlichkeit $p=1/n$ würfelt man eine 4.
Der Ausstieg von Z6 nach Z4 erfordert im Mittel $1/p = n$ Spiele.
Von Z6 nach Z3 erwartet man bei $p=1/n$ mit $n=6$ demnach $az\cdot n = 7\cdot 6 = 42$ Würfe .
Der Gewinnbetrag von $gb =az \cdot(1/p) \cdot eb = 42$ Chip ist fair.

Fundamentale Transit-Variation
‚Stationäre Matrix' der regulären Matrix P' ist die Matrix $A=(a_{i,j})$ mit den stationären Verteilungswerten z1,z2,z3,z4,z5,z6 in jeder Zeile $(a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}, a_{i,4}, a_{i,5}, a_{i,6})$, $i\in\{1,2,3,4,5,6\}$.
Für die Folge der Potenzen P'^k mit k=1,2,3,... ist A der Grenzwert für $k\to\infty$. Die von P'–A erzeugte geometrische Reihe ist die ‚Fundamentalmatrix' Z der von P' erzeugten regulären Kette .
Zufolge $(P'-A)^k = P'^k - A$ schreibt man
$Z = I + P'-A + (P'^2-A) + (P'^3-A) + \ldots$ .Es ist Z somit die inverse Matrix von $I-(P'-A)$.

Für p=1/6 ergibt sich als k-te Teilsumme der Reihe, auf sechs Nachkommastellen gerechnet, für k=35

die Matrix $Z_k = \begin{pmatrix} 0.9952 & -0.1008 & -0.1008 & 0.9408 & -0.2496 & -0.4848 \\ -0.0048 & 0.8992 & -0.1008 & 0.9408 & -0.2496 & -0.4848 \\ -0.0048 & -0.1008 & 0.8992 & 0.9408 & -0.2496 & -0.4848 \\ 0.1152 & -0.0808 & -0.0808 & 1.4208 & -0.0096 & -0.3648 \\ -0.0448 & 0.0592 & 0.0592 & -1.2192 & 1.6704 & 0.4752 \\ -0.3648 & 0.3392 & 0.3392 & -0.4992 & -0.9696 & 2.1552 \end{pmatrix}$ und lässt vermuten,

dass dieser Ausdruck Zd mit den 4 Nachkommastellen bereits die Fundamentalmatrix $Z= inv(I+A-P')$ der regulären Kette von P' bei p=1/6 angibt. Damit wäre hier

$$Zd \cdot (I+A-P') = Zd \cdot \begin{pmatrix} 56/50 & 1/50 & 1/50 & -26/50 & 12/50 & 6/50 \\ 6/50 & 51/50 & 1/50 & -26/50 & 12/50 & 6/50 \\ 6/50 & 1/50 & 51/50 & -26/50 & 12/50 & 6/50 \\ -7/150 & 1/50 & 1/50 & 61/75 & 11/150 & 6/50 \\ -7/150 & 1/50 & 1/50 & 24/50 & 43/75 & -7/150 \\ 6/50 & -11/75 & -11/75 & 24/50 & 12/50 & 34/75 \end{pmatrix} = I .$$

Kontrollrechnungen mit dem Taschenrechner bestätigen $Zd \cdot (I + A - P') = I$ und damit Z=Zd .

Mit der Fundamentalmatrix ergibt sich, im Matrizenkalkül notiert, die Hilfsmatrix $H= I + E\cdot Z_{dg} - Z$.
Hierbei ist E eine Matrix , die durchweg mit Ziffer 1 besetzt ist und Z_{dg} ist die aus der Diagonalen von Z gebildete Diagonalmatrixmatrix. In jeder Zeile des Produkts $E\cdot Z_{dg}$ stehen somit die Diagonalelemente von Z , bei p=1/6 also die Werte 0.9956 , 0.8992 , 0.8993 , 1.4208 , 1.6704 , 2.1552 .
Mit H und der Diagonalmatrix D_{ks}, in deren Diagonale die Kehrwerte der stationären Wahrscheinlichkeiten z1,z2,z3,z4,z5,z6 von P' aufgereiht sind, ergibt sich das Ziel der Prozedur, die ‚Transit–Matrix' $M = H \cdot D_{ks}$.
Für p=1/6 hat man die Kehrwerte 25/3, 50, 50, 25/12, 25/6, 25/3 und damit ist dann

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0.48 & 1.92 & 2.64 \\ 1 & 1 & 1 & 0.48 & 1.92 & 2.64 \\ 1 & 1 & 1 & 0.48 & 1.92 & 2.64 \\ 0.88 & 0.98 & 0.98 & 1 & 1.68 & 2.52 \\ 1.04 & 0.84 & 0.84 & 2.64 & 1 & 1.68 \\ 1.36 & 0.56 & 0.56 & 1.92 & 2.64 & 1 \end{pmatrix} \cdot D_{ks} = \begin{pmatrix} 25/3 & 50 & 50 & 1 & 8 & 22 \\ 25/3 & 50 & 50 & 1 & 8 & 22 \\ 25/3 & 50 & 50 & 1 & 8 & 22 \\ 22/3 & 49 & 49 & 25/12 & 7 & 21 \\ 26/3 & 42 & 42 & 11/2 & 25/6 & 14 \\ 34/3 & 28 & 28 & 4 & 11 & 25/3 \end{pmatrix} .$$

Die Matrix M liefert mit ihren Koeffizienten $m_{i,j}$ $i,j\in\{1,2,3,4,5,6\}$ die ‚first passage time' von Zi nach Zj, also on the long run die erwartete Anzahl der Schritte, um vom Zustand Zi erstmals zum Zustand Zj zu gelangen. Beispielsweise hat man bei p=1/6 eine first passage time von 1+21=22 Schritten, um von einem der Zustände von ZA=Z1uZ2uZ3 und Einstieg in Z4 zum Zustand Z6 zu gelangen und erwartet dann weitere 28 Schritte, um von dort bis nach Z3 zu gelangen, insgesamt also 50 Schritte von ZA nach Z3. Das entspricht der für n=6 im Schlussakkord der Absorptions-Variation genannten Anzahl $z(4,3)\cdot (t(4,3)+1)= 7\cdot n + 8$ der Schritte von ZA nach Z3 mit dem Einstiegschritt in Z4 .

Die Transit-Matrix M ist mit der Matrix P' durch $M=P'\cdot(M-M_{dg})+E$ verknüpft, wobei M_{dg} eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen von M ist, sodass die Diagonale in $M-M_{dg}$ durchweg mit 0 belegt ist .

Zum vorgelegten $P'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1-2\cdot p & p & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 1-2\cdot p & p \\ 0 & p & p & 0 & 0 & 1-2\cdot p \end{pmatrix}$ und $E=\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$ und den

Kehrwerten $m_{i,i}=1/zi$ der stationären Verteilung z=(z1,z2,z3,z4,z5,z6) von P', wobei z1=6p·z6, z2=p·z6, z3=p·z6, z4=4·z6, v5=2·z6 und z6=1/(7+8p), findet man anhand $M=P'\cdot(M-M_{dg})+E$ die

$$\text{Transit-Matrix} \quad M=\begin{pmatrix} \frac{4}{3}+\frac{7}{6\cdot p} & 8+\frac{7}{p} & 8+\frac{7}{p} & 1 & 2+\frac{1}{p} & 4+\frac{3}{p} \\ \frac{4}{3}+\frac{7}{6\cdot p} & 8+\frac{7}{p} & 8+\frac{7}{p} & 1 & 2+\frac{1}{p} & 4+\frac{3}{p} \\ \frac{4}{3}+\frac{7}{6\cdot p} & 8+\frac{7}{p} & 8+\frac{7}{p} & 1 & 2+\frac{1}{p} & 3+\frac{3}{p} \\ \frac{1}{3}+\frac{7}{6\cdot p} & 7+\frac{7}{p} & 7+\frac{7}{p} & \frac{7}{4}+2\cdot p & 1+\frac{1}{p} & 2+\frac{2}{p} \\ \frac{2}{3}+\frac{4}{3\cdot p} & 6+\frac{6}{p} & 6+\frac{6}{p} & 1+\frac{3}{4\cdot p} & \frac{7}{2}+4\cdot p & 7+8\cdot p \\ \frac{4}{3}+\frac{5}{3\cdot p} & 4+\frac{4}{p} & 4+\frac{4}{p} & 1+\frac{1}{2\cdot p} & 2+\frac{3}{2\cdot p} & 7+8\cdot p \end{pmatrix}.$$

Wie man leicht sieht, liefert dies allgemeine M für p=1/6 das oben auf dem Weg über die spezielle Fundamentalmatrix Z gefundene spezielle Matrix M.

Schlussakkord der fundamentalen Transit-Variation

Die Transitmatrix M liefert im Spiel „4 nach 2x2 gewinnt" bei Verwendung eines regelmäßigen Polyeders als Würfel mit n Flächen mittels p=1/n die Passagezeit vom Zustand Zi zum Zustand Zj für $i,j\in\{1,2,3,4,5,6\}$. Bei Verwendung eines platonischen Körpers als Würfel sind beim Einsatzbetrag eb= 1 Chip pro Wurf folgende Gewinnbeträge fair:
28 Chip beim Tetraeder (n=4), 42 Chip beim Hexaeder (n=6), 56 Chip beim Oktaeder (n=8),
84 Chip beim Dodekaeder (n=12), 140 Chip beim Ikosaeder.
Beispielsweise hat man beim Würfeln eines Tetraeders die Passagezeit m(1,3)= 8+7·n = 36 vom Zustand Z1 nach Z3 und gleichfalls von Z2 oder Z3 nach Z3 , also einem Zustand von ZA=Z1uZ2uZ3 nach Z3 . Von diesen 36 Schritten erfolgen mit der Wahrscheinlichkeit zD= 7·n/(7·n +8) =7/9 die Spielschritte durch Würfe, also zD·m(1,3)= 7·n= 28 Schritte. Damit ist mit einem Tetraederwürfel beim Einsatz von 1 Chip pro Wurf der Gewinn von 28 Chip fair.

Kurzweg-Variation

Die Gewinnbeträge sind stets das 7-fache des Einsatzes. Das lässt sic h mit einem von ZA nach Z4 kurzgeschlossenen Übergang durch Abwandlung der Matrix P' in eine Matrix P'' erkennen .
In ihrer Kette gibt es nur Schritte, in denen der Würfel fällt. Der Ausstieg nach ZA und Wiedereinstieg in Z4 ist kurzgeschlossen Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten ist

$P''=(p''_{i,j})$ für $i,j\in\{4,5,6\}$ und hat die Form $P''=\begin{pmatrix} 1-p & p & 0 \\ p & 1-2\cdot p & p \\ 2\cdot p & 0 & 1-2\cdot p \end{pmatrix}$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten der Matrix R von P in der Absorptions-Variation, also die von ZD nach ZA in Matrix P , sind gemäß dem ‚Kurzweg' in die erste Spalte der Matrix Q aufsummiert hineingenommen. Jeder Schritt ist ein Wurf.

Durchführung

Ausgehend von der Wahrscheinlichkeits-Verteilung $x_0=(1,0,0)$, die den sicheren Start in Z4 beim eines Spiels beschreibt, ergibt sich rekursiv mit $x_{k+1}=x_k\,P''$ für k=1,2,3,... eine reguläre Markoffkette, die hier bei p=1/6 für k=35 auf sechs Nachkommastellen gerundet die Verteilung

x_{35} =(0.571429 , 0.285714 , 0.142857) zeigt, was auf eine stationäre Verteilung vs=(4/7, 2/7, 1/7) für k→ ∞ hindeutet.
Aus dem Ansatz vs=(v4,v5,v6) mit vs P'' = vs und v1+v2+v3 =1 für die stationäre Verteilung vs der Matrix P'' ergeben sich die Gleichungen 2·v5=v4, 2·v6=v5, 4·v6=v4 und damit 1= (4+2+1)·v6.
Die stationäre Verteilung der Matrix P'' hat somit wie vermutet die Verteilungswerte 4/7, 2/7, 1/7 .
Im Zustand Z6 ist man on the long run mit der Wahrscheinlichkeit v6=1/7. Dort würfelt man mit der Wahrscheinlichkeit p=1/n eine 4 und nimmt in diesem Fall auf dem Kurzweg nach Z4 den Gewinn mit.
Somit erzielt man auf dem Zyklus von Z4 nach Z4 mit der Wahrscheinlichkeit v6·p = 1/7 ·1/n =1/(7·n) den Gewinn. Im Mittel erfordert das 7·n Schritte. Jeder Schritt ist ein Wurf.
Das 7·n -fache des Einsatzes ist also stets ein fairer Gewinn.

Abgesang

Mit einem symmetrischen Polyeder mit n Flächen als Würfel ist das Spiel beim Gewinnbetrag
gb = 7·n eb , eb = Einsatzbetrag, fair.
Ein üblicher Würfel ist symmetrisch und hat sechs Flächen.
Der Gewinn von 42 Chip im Spiel „Jeder Wurf ein Chip, 4 nach 2 mal 2 gewinnt. “
ist mit einem üblichen Würfel fair.

———

Als Vorlage zur Gestaltung des Opus diente die Darstellung der Markoffketten-Theorie in Kemeny/Snell , Finite Markov Chains, D.van Nostrand , Company, Inc . 1960 ,London
The University Series in undergraduate Mathematics.

Symmetrische Polyeder zum Würfeln , darunter die fünf platonischen Körper, findet man im Internet
www.thediceshoponline.com

Chessex Air speckled 7 Dice Polyset