**Markoffketten-Variationen zum Würfelspiel „4 nach 2x2 und 1x1 gewinnt“**
Ein Opus für Arnold Schönhage zum 76. Geburtstag anno 2010 fürs Spiel mit einem Tetraeder
von Fritz Ostermann Dez 2010.

## Eröffnung

Ein symmetrisches Polyeder mit n = 4 Flächen dient als Würfel.
Jeder Wurf fordert einen Chip. Mit einer 4 nach zweimal 2 und einmal 1 erwirbt man $19 \cdot n = 76$ Chip.
Im Spielablauf gibt es 10 Zustände.
‚Absorptionszustände' Z1, Z2, Z3, Z4. im Sinne von ‚Spiel aus'.
Z1 = ‚Aus' nach 4 ohne 2x2, Z2= ‚Aus' nach 2 bei 2x2, Z3= ‚Aus' nach 1 bei 1x1 ,
Z4 = ‚Aus' bei 4 bei 2x 2 und 1x1 .
‚Durchgangszustände' Z5, Z6, Z7, Z8, Z9, Z10 im Sinne von ‚Spiel ein' .
Z5 = ‚Ein' bei 0x2 und 0x1, Z6= ‚Ein' bei 1x2 und 0x1, Z7= ‚Ein' bei 2x2 und 0x1,
Z8 = ‚Ein' bei 0x2 und 1x1, Z9= ‚Ein' bei 1x2 und 1x1, Z10= ‚Ein' bei 2x2 und 1x1,

Mit dem Übergang vom globalen Durchgangszustand ZD=Z5uZ6uZ7uZ8uZ9uZ10 in den globalen Absorptionszustand ZA=Z1uZ2uZ3uZ4 endet ein Spiel.
Man startet bei 0x2 und 0x1. Man gewinnt in Z4.
Der Einstieg in Z5 beim Start erfolgt ohne Wurf.
Jeder Wurf ist ein Spielschritt mit dem Einsatz eb = 1 Chip.

**Fundamentale Absorptions-Variation**
Eine Matrix P erzeugt eine absorbierende Markoffkette.
Berechnet werden Wartezeiten, d.h. die mittlere Zahl der Schritte im Zustand ZD.
Der Einstieg ins Spiel zählt als Warteschritt mit, der Ausstieg nach ZA nicht.

## Durchführung

Übergangswahrscheinlichkeit beim Wechsel zum jeweils erreichbaren Zustand ist p=1/n mit n=4.
Matrix P der Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i,j}$ von $Z_i$ nach $Z_j$ für $i,j \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ ist

$$P=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ p&0&0&0&1-3\cdot p&p&0&p&0&0\\ p&0&0&0&0&1-3\cdot p&p&0&p&0\\ p&p&0&0&0&0&1-3\cdot p&0&0&p\\ p&0&p&0&0&0&0&1-3\cdot p&p&0\\ p&0&p&0&0&0&0&0&1-3\cdot p&p\\ 0&p&p&p&0&0&0&0&0&1-3\cdot p \end{pmatrix} \text{ mit Teilmatrizen } \mathrm{I}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$R=\begin{pmatrix} p&0&0&0\\ p&0&0&0\\ p&p&0&0\\ p&0&p&0\\ p&0&p&0\\ 0&p&p&p \end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix} 1-3\cdot p&p&0&p&0&0\\ 0&1-3\cdot p&p&0&p&0\\ 0&0&1-3\cdot p&0&0&p\\ 0&0&0&1-3\cdot p&p&0\\ 0&0&0&0&1-3\cdot p&p\\ 0&0&0&0&0&1-3\cdot p \end{pmatrix} \text{ und der}$$

$$\text{„Nullmatrix" } O=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \text{ neben der Einheitsmatrix } \mathrm{I}.$$

$R=(r_{i,j})$ für $i \in \{5,6,7,8,9,10\}$, $j \in \{1,2,3,4\}$ ist die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten von einem Durchgangszustand zu einem Absorptionszustand, Matrix $Q=(q_{i,j})$ für $i,j \in \{5,6,7,8,9,10\}$ ist die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen Durchgangszuständen.

Ausgehend von der Wahrscheinlichkeits--Verteilung $x_0$=(0,0,0,0,1,0,0,0,0,0), die den sicheren Schritt von ZA nach Z5 beim Start eines Spiels beschreibt, ergibt sich rekursiv durch $x_{k+1}= x_k\, P$ für k=1,2,3,... eine absorbierende Markoffkette, die hier für k=20 bei p=1/4 auf sechs Nachkommastellen die

Verteilung $x_{25}$=(0.666666, 0.074074, 0.222222, 0,037037)) zeigt, was für $k \to \infty$ eine Grenz-Verteilung $x_\infty$=(2/3, 2/27, 2/9, 1/27, 0, 0, 0,0, 0, 0) andeutet und damit die ‚Absorptionswkten 2/3, 2/27, 2/9 , 1/27 in den Zuständen Z1,Z2, Z3 bzw. Z4 vermuten lässt. Setzt man p=1/n mit n=6 (8, 12, 20), zeigt sich solche Verteilung mit 6 Nachkommastellen für k=30 (45, 70, 120).

Die durch $s_{k+1} = s_k + x_k$ mit $s_0 = x_0$ rekursiv definierte Folge $s_k = (s_{5,k}, s_{6,k}, s_{7,k}, s_{8,k}, s_{9,k}, s_{10,k})$ der aufsummierten Werte des hinteren Tripels $x_k$" =$(x_{5,k}, x_{6,k}, x_{7,k} x_{8,k}, x_{9,k}, x_{10,k})$ der in Tupel zerlegten Verteilungen $x_k = x_k' + x_k$" ergibt sich nach dem Start mit dem Tripel $x_0$''= (1,0,0,0,0,0) mittels der Matrizen $N_k = I+Q+Q^2+Q^3+ ... +Q^k$ , den Partialsummen der von Q erzeugten ‚Fundamentalmatrix' $N= I+Q+Q^2+Q^3+...$ , also der summierten Treffen der Durchgangszustände Z5, Z6, Z7, Z8, Z9, Z10, beginnend mit dem Einstieg in Z5 .
Für k=20 bei p=1/4 ist $s_{20}$ =(1.333333, 0.444444, 0.148148, 0,444444, 0.296296, 0.148148 ), gerundet auf 6 Nachkommastellen. Das lässt vermuten, dass im Mittel 4/3 Schritte in Z5, 4/9 in Z6, 4/27 in Z7, 4/9 in Z8, 8/27 in Z9 und 4/27 in Z10, insgesamt somit (36+12+4 +12+8 +4)/27 = 76/27 Schritte in ZD erfolgen, bevor nach ZA gewechselt wird.
Bei p=1/n mit n=6 ergibt sich mit 6 Nachkommastellen für k=30 die Verteilung $s_{30}$ =(2.000000, 0.666666, 0.222222, 0.666666, 0.444444, 0.222222 ), was im Mittel 2 Schritte in Z5, 2/3 in Z6, 2/9 in Z7, 2/3 in Z8, 4/9 in Z9 und 2/9 in Z10, somit (18+6+2+6+4+2)/9 = 38/9 Schritte in ZD erfolgen, bevor nach ZA gewechselt wird.

Die Koeffizienten von $N=(n_{i,j})$ für $i,j \in \{5,6,7,8,9,10\}$ sind gemittelte Anzahlen der Schritte in den Durchgangszuständen bis zum Schritt nach ZA. Es sind ‚Wartezeiten' in den Zuständen von ZD bis zum Ausstieg nach ZA, abhängig vom Durchgangszustand, mit dem man startet und das Warten beginnt.
Die Fundamentalmatrix N ist als geometrische Reihe von Q die inverse Matrix von I–Q.
Damit ergeben sich N und deren Zeilensummen , abhängig von p=1/n , wie folgt.

$$N=\begin{pmatrix} 1/(3\cdot p) & 1/(9\cdot p) & 1/(27\cdot p) & 1/(9\cdot p) & 2/(27\cdot p) & 1/(27\cdot p) \\ 0 & 1/3\cdot p & 1/(9\cdot p) & 0 & 1/(9\cdot p) & 2/(27\cdot p) \\ 0 & 0 & 1/3\cdot p & 0 & 0 & 1/(9\cdot p) \\ 0 & 0 & 0 & 1/3\cdot p & 1/(9\cdot p) & 1/(27\cdot p) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3\cdot p & 1/(9\cdot p) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3\cdot p \end{pmatrix} \text{ sowie } \begin{pmatrix} t(5,A) \\ t(6,A) \\ t(7,A) \\ t(8,A) \\ t(9,A) \\ t(10,A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/(27\cdot p) \\ 17/(27\cdot p) \\ 12/(27\cdot p) \\ 13/(27\cdot p) \\ 12/(27\cdot p) \\ 9/(27\cdot p) \end{pmatrix}$$

als Wartezeiten in ZD nach Einstieg in Zi, $i \in \{5, 6,7,8,9,10\}$, für einen Ausstieg nach ZA.
Das vermutete Wartezeiten-Tupel (4/3 , 4/9 , 4/27, 4/9, 6/27, 4/9) für p=1/4 beim Einstieg in Z5 ist damit bestätigt.

Das Matrizenprodukt $B= N\cdot R = (b_{i,j})$ für $i \in \{5,6,7,8 ,9, 10\}$, $j \in \{1,2,3,4\}$ liefert die ‚Absorptions-wahrscheinlichkeiten der Zustände Z1, Z2, Z3, Z4 nach einem Start im Durchgangszustand Zi.

$$\text{Es ist } B= N\cdot R = \begin{pmatrix} 18/27 & 2/27 & 6/27 & 1/27 \\ 15/27 & 5/27 & 5/27 & 2/27 \\ 9/27 & 12/27 & 3(27 & 3/27 \\ 12/27 & 1/27 & 13/27 & 1/27 \\ 9/27 & 3/27 & 12/27 & 3/27 \\ 0 & 9/27 & 9/27 & 9/27 \end{pmatrix} .$$

Damit ist die für p=1/n bei, $n \in 4$ (6,8,12,30) vermutete Verteilung der Absorption auf die vier Zustände Z1, Z2, Z3, Z4 gemäß dem Quadrupel (2/3, 2/27, 2/9 , 1/27) als Grenzverteilung nach dem Start in Z5 bestätigt.

## Schlussakkord der fundamentalen Absorptionsvariation

Wartezeit in ZD bei p=1/n mit dem Einstieg beim Start in Z5 ist $t(5,A)= 19\cdot n / 27$ .
Absorptionswahrscheinlichkeit des Zustandes Z4 beim Ausstieg ist b(5,4)= 1/27 .
Der Ausstieg nach Z4 fordert im Mittel z(5,4) = 1/b(5,4) = 27 Spiele.
Die erwartete Schrittzahl von ZA nach Z4 mit dem Einstieg in Z5 ist $z(5,4)\cdot (t(5,A)+1)= 19\cdot n + 27$ .
Die Schrittzahl ohne Einstiegschritt mit dem Ausstieg nach Z4 ist $tw(5,4)= z(5,4) \cdot t(5,A)= 19 \cdot n$ .
Der aufsummierte Ausstiegsschritt zählt als Wurf, der Einstiegsschritt nicht.
Von Z5 bis in Z4 erwartet man $19 \cdot n$ in ZD durch Wurf gestartete Schritte.
Jeder Wurf fordert eb= 1 Chip.
Bei p=1/n mit n=4 ist der Gewinnbetrag gb=tw(5,4) eb = 76 Chip fair .

**Reguläre Variationen**

## Überleitung

Die absorbierende Matrix P wird abgewandelt in eine Matrix P'=($p'_{i,j}$ ), die sich in den Positionen (1,1), (1,5), (2,2), (2,5), (3,3), (3,5), (4,4), (4,5) von P unterscheidet. Die Wahrscheinlichkeit 1 in den Absorptionszuständen ist nach Z5 transferiert. Matrix P' erzeugt eine reguläre Markoffkette .
On the long run wird im Spiel von einem Zustand Zi jeder andere Zustand Zj erreicht, für die von P' erzeugte Kette gibt es eine eindeutig bestimmter stationäre Verteilung
zs=(z1,z2,z3,z4,z5,z6.z7. z8.z9,z10), wobei zs P' = zs und z1+z2+z3+z4+z5+z6+z7+z8+z9+z10= 1.

## Stationär-reguläre Variation

Matrix der regulären Kette ist

$$P'(p'_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 1-3\cdot p & p & 0 & p & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-3\cdot p & p & 0 & p & 0 \\ p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-3\cdot p & 0 & 0 & p \\ p & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-3\cdot p & p & 0 \\ p & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-3\cdot p & p \\ 0 & p & p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-3\cdot p \end{pmatrix} \quad \text{für } i,j\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \ .$$

Ausgehend von der Wahrscheinlichkeits-Verteilung $x_0$=(0,0,0,0,1,0,0,0,0,0), die den sicheren Schritt von ZA nach Z5 beim Start eines Spiels beschreibt, ergibt sich rekursiv durch $x_{k+1}$= $x_k$ P' für k=1,2,3,... eine reguläre Markoffkette, die hier für k=20 bei p=1/4 auf 6 Nachkommastellen die Verteilung $x_{15}$=(0.174757, 019417, 0.058252, 0.009709, 0.349515, 0.116505, 0.038835, 0.116505, 0.077670, 0.038835 ) zeigt, und damit der für k→∞ der im Folgenden errechneten stationären Grenz-Verteilung $x_\infty$=(18/103, 2/103, 6/103,1/103, 36/103, 12/103, 4/103, 12/103, 8/103, 4/103 ) schon nahe kommt sowie dem Verhältnis 18:2:6:1 zwischen den ‚Absorptionswahrscheinlichkeiten der Zustände Z1,Z2, Z3. Z4 entspricht.

Für die stationäre Verteilung zs von P' ergeben sich durch zs P' = zs die Gleichungen
3·p·z5 = zA, 3·z6 = z5, 3·z7 = z6, 3·z8=z5 , 3·z9=z6+z8, 3·z10=z7+z9, wobei zA=z1+z2+z3+z4 und zA+zD=1 mit zD=z5+z6+z7+z8+z9+z10.
Das führt zu 3·zD=17·z6 +z7+z8+z9 = 18·z6 = (19/3)·z5 und zD=(19/9)·z5.
Es ist 1 = zA+zD = (3·p+19/9)·z5 und damit z5=9/(19+27·p), woraus folgt
zD=19/(19+27·p), zA=27·p/(19+27·p) und z6=3/(19+27·p), z7=1/(19+27·p), z8=3/(19+27·p), z9=2/(19+27·p), z10=1/(19+27·p).
Zufolge z1=p·(z5+z6+z7+z8+z9), z2=p·(z7+z10), z3=p·(z8+z9+z10), z4=p·z10 ist
z1=18·p/(19+27·p), z2=2·p/(19+27·p), z3=6·p/(19+27·p).
Für p=1/n mit n=4 ist 19/p +27 = 19·n +27 = 76 + 27 =103 .
Die stationären Verteilungswerte für p=1/4 sind somit in 1/103, wie die Rechnung andeutete, (18, 2, 6, 1, 36, 12, 4, 12, 8, 4 ). Zudem ist zA=27/103 , zD= 76/103 .
Für p=1/n mit n=6 ergibt sich der Nenner 19·n +27 = 114 + 27 =141 und man erhält in 1/141 die Verteilungswerte (18, 2, 6, 1, 54, 18, 6, 18, 12, 6 ) und es ist zA=27/141 , zD= 114/141 .
Auf 6 Nachkommastellen gerundet sind es die Werte (0.127660, 0.014184, 0.042553, 0.007092, 0.382978, 0.127660, 0.042553, 0.127660, 0.085106, 0.042553) .

## Abklang der stationär-regulären Variation

Die stationären Verteilungswerte z1, z2, z3. z4 stehen im Verhältnis 18:2:6 :1 .
Das entspricht den Absorptionswkten b(5,1)=18/27, b(5,2)=2/27, b(5,3)=6/27, b(5,4)=1/27.
Mit der Wahrscheinlichkeit z10= n/(19·n +27) ist man bei p=1/n on the long run im Zustand Z10, im Mittel nach jeweils 1/z10 = (19·n+ 27)/n Schritten. Davon erfolgen az= zD·1/z10 = 19 durch Würfe.
Mit der Wahrscheinlichkeit p=1/n würfelt man eine 4.
Der Ausstieg von Z10 nach Z4 erfordert im Mittel nach 1/p = n Spielen.
Von Z10 nach Z4 erwartet man bei p=1/n mit n=4 demnach az·n = 19·4 = 76 Würfe .
Der Gewinnbetrag von gb =az ·(1/p) ·eb = 76 Chip ist mit dem Tetraeder fair.
Spielt man mit einem Hexaeder, ist 6·19 = 114 Chip ein fairer Gewinnbetrag

**Fundamentale Transit-Variation**

‚Stationäre Matrix' der regulären Matrix P' ist die Matrix $A=(a_{i,j})$ mit den stationären Verteilungswerten z1,z2,z3,z4,z5,z6,z7,z8,z9,z10 in jeder Zeile
$(a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}, a_{i,4}, a_{i,5}, a_{i,6}, a_{i,7}, a_{i,8}, a_{i,9}, a_{i,10})$ , $i\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ .
Für die Folge der Potenzen $P'^k$ mit k=1,2,3,... ist A der Grenzwert für $k\to\infty$ . Die von P'–A erzeugte geometrische Reihe ist die ‚Fundamentalmatrix' Z der von P' erzeugten regulären Kette .
Zufolge $(P'-A)^k = P'^k-A$ schreibt man
$Z = I + P'-A + (P'^2-A) + (P'^3-A) + \ldots$ .Es ist Z die inverse Matrix von $I-(P'-A)$ .

Für p=1/6 ergibt sich als k-te Teilsumme der Reihe mit 4 Nachkommastellen für k=35 die Matrix

$$Z_k = \begin{pmatrix} 0.9439 & -0.0582 & -0.1038 & -0.0362 & 0.7252 & -0.0136 & -0.0896 & -0.0136 & -0.1793 & -0.1747 \\ -0.0561 & 0.9418 & -0.1038 & -0.0362 & 0.7252 & -0.0136 & -0.0896 & -0.0136 & -0.1793 & -0.1747 \\ -0.0561 & -0.0582 & 0.8962 & -0.0362 & 0.7252 & -0.0136 & -0.0896 & -0.0136 & -0.1793 & -0.1747 \\ -0.0561 & -0.0582 & -0.1038 & 0.9638 & 0.7252 & -0.0136 & -0.0896 & -0.0136 & -0.1793 & -0.1747 \\ 0.0715 & -0.0441 & -0.0613 & -0.0291 & 1.1082 & 0.1141 & -0.0471 & 0.1141 & -0.0942 & -0.1322 \\ 0.0172 & 0.0734 & -0.0794 & 0.0111 & -0.7216 & 1.5041 & 0.4163 & -0.4959 & 0.1659 & 0.1089 \\ -0.0632 & 0.3484 & -0.1062 & 0.0560 & -0.2961 & -0.3540 & 1.7969 & -0.3540 & -0.4062 & 0.3785 \\ 0.0195 & -0.0622 & 0.2547 & -0.0197 & -0.3812 & -0.3824 & -0.2126 & 1.6176 & 0.2415 & -0.0754 \\ -0.0632 & 0.0150 & 0.2272 & 0.0560 & -0.2961 & -0.3540 & -0.2031 & -0.3540 & 1.5938 & 0.3785 \\ -0.3115 & 0.2467 & 0.1444 & 0.2829 & -0.0407 & -0.2689 & -0.1747 & -0.2689 & -0.3495 & 1.7402 \end{pmatrix}$$

und lässt vermuten, dass dieser Ausdruck Zd mit den 4 Nachkommastellen bereits eine brauchbare Näherung der Fundamentalmatrix Z= inv(I+A–P') der regulären Kette von P' bei p=1/6 angibt.
Rechnungen bestätigen, dass $Zd \cdot (I+A-P') \approx$ Einheitsmatrix I und damit $Z \approx Zd$ .

Mit der Fundamentalmatrix ergibt sich, im Matrizenkalkül notiert, die Hilfsmatrix $H= I + E\cdot Z_{dg} - Z$ .
Hierbei ist E eine Matrix , die durchweg mit Ziffer 1 besetzt ist und $Z_{dg}$ ist die aus der Diagonalen von Z gebildete Diagonalmatrixmatrix. In jeder Zeile des Produkts $E\cdot Z_{dg}$ stehen somit die Diagonalelemente von Z , bei p=1/6 also die Werte
0.9439, 0.9418, 0.8962, 0.9638, 1.1082, 1.5041, 1.7969, 1.6176, 1.5938, 1.7402 .

Damit ist dann für p=1/6, gerundet auf 4 Nachkommastellen,

$$H= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0.3830 & 1.5177 & 1.8865 & 1.6312 & 1.7730 & 1.9149 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0.3830 & 1.5177 & 1.8865 & 1.6312 & 1.7730 & 1.9149 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0.3830 & 1.5177 & 1.8865 & 1.6312 & 1.7730 & 1.9149 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0.3830 & 1.5177 & 1.8865 & 1.6312 & 1.7730 & 1.9149 \\ 0.8723 & 0.9858 & 0.9574 & 0.9929 & 1 & 1.3902 & 1.8440 & 1.5035 & 1.6879 & 1.8723 \\ 0.9267 & 0.8684 & 0.9756 & 0.9527 & 1.8298 & 1 & 1.3806 & 2.1135 & 1.4279 & 1.6312 \\ 1.0071 & 0.5934 & 1.0024 & 0.9078 & 1.4043 & 1.8582 & 1 & 1.9716 & 2 & 1.3617 \\ 0.9243 & 1.0039 & 0.6414 & 0.9835 & 1.4894 & 1.8865 & 2.0095 & 1 & 1.3522 & 1.8156 \\ 1.0071 & 0.9267 & 0.6690 & 0.9078 & 1.4043 & 1.8582 & 2 & 1.9716 & 1 & 1.3617 \\ 1.2553 & 0.6950 & 0.7518 & 0.6809 & 1.1489 & 1.7730 & 1.9716 & 1.8865 & 1.9433 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit H und der Diagonalmatrix $D_{ks}$, in deren Diagonale die Kehrwerte der stationären Wahrscheinlichkeiten z1,z2,z3,z4,z5,z6, z7, z8, z9, z10 von P' aufgereiht sind, ergibt sich hier das Ziel der Matrizenberechnung, die ‚Transit–Matrix' $M = H \cdot D_{ks}$ .
Für p=1/n mit n=6 hat man die Kehrwerte
141/18, 141/2, 141/6, 141, 141/54, 141/18, 141/6, 141/12, 141/6 .
Auf 4 Nachkommastellen gerundet (mit unterdrückten Nullen) sind es die Werte
(7.8333, 70.5, 23.5, 141, 2.6111, 7.8333, 23.5, 7.8333, 11.75, 23.5 .
Damit ist dann das Matrizenprodukt $M = H\cdot D_{ks}$ , angegeben mit gegebenenfalls periodischen drei letzten Ziffern, beispielsweise steht 7.259 für 7.259259259... und 7.2407 für 7.2407407407... ,

$$M = \begin{pmatrix}
7.8333 & 70.5 & 23.5 & 141 & 1 & 11.888 & 44.333 & 12.777 & 20.8333 & 45 \\
7.8333 & 70{,}5 & 23.5 & 141 & 1 & 11.888 & 44.333 & 12.777 & 29.8333 & 45 \\
7.8333 & 70.5 & 23.5 & 141 & 1 & 11.888 & 44.333 & 12.777 & 20.8333 & 45 \\
7.8333 & 70.5 & 23.5 & 141 & 1 & 11.888 & 44.333 & 12.777 & 20.8333 & 45 \\
6.8333 & 69.5 & 22.5 & 140 & 2.6111 & 10.888 & 43.333 & 11.777 & 19.8333 & 44 \\
7.259 & 61.222 & 22.925 & 134.333 & 4.777 & 7.8333 & 32.444 & 16.555 & 16.777 & 38.333. \\
7.888 & 41.8333 & 23.555 & 128 & 3.666 & 14.555 & 23.5 & 15.444 & 23.5 & 32 \\
7.2407 & 70.777 & 15.074 & 138.666 & 3.888 & 14.777 & 47.222 & 7.8333 & 15.888 & 42.666 \\
7.888 & 65.333 & 15.7222 & 128 & 3.666 & 14.555 & 47 & 15.444 & 11.75 & 32 \\
9.8333 & 49 & 17.666 & 96 & 3 & 13.888 & 46.333 & 14.777 & 22.8333 & 23.5
\end{pmatrix}.$$

Die Koeffizienten $m_{i,j}$, $i.j\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, der Transit-Matrix M sind on the long run ‚first passage times' , d.h. mittlere Schrittanzahlen, um vom Zustand Zi erstmals nach Zj zu gelangen . Beispielsweise hat man bei p=1/6 eine first passage time von 1+44=45 Schritten, um von einem der Zustände von ZA=Z1uZ2uZ3uZ4 und Einstieg in Z5 zum Zustand Z10 zu gelangen und erwartet dann weitere 96 Schritte, um von dort bis nach Z4 zu gelangen, insgesamt also 141 Schritte von ZA nach Z4. Das entspricht der für n=6 im Schlussakkord der Absorptions-Variation genannten Anzahl $z(4,3)\cdot(t(4,3)+1)= 19\cdot n + 27$ der Schritte von ZA nach Z4 mit dem Einstiegschritt in Z5 .

$M=(m_{i,j})$ ist mit der Matrix P' durch $M=P'\cdot(M - M_{dg}) + E$ verknüpft, wobei $M_{dg}$ eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen von M ist, sodass die Diagonale in $M-M_{dg}$ durchweg mit 0 belegt ist . Zu

$$P'=\begin{pmatrix}
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
p&0&0&0&1-3p&p&0&p&0&0\\
p&0&0&0&0&1-3p&p&0&p&0\\
p&p&0&0&0&0&1-3p&0&0&p\\
p&0&p&0&0&0&0&1-3p&p&0\\
p&0&p&0&0&0&0&0&1-3p&p\\
 &p&p&p&0&0&0&0&0&1-3p
\end{pmatrix},\; E=\begin{pmatrix}
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1& &1&1
\end{pmatrix}$$

und den Kehrwerten $m_{i,i}=1/zi$ der stationären Verteilung zs=(z1,z2,z3,z4,z5,z6,z7,z8,z9,z10) von P', wobei $z1=19p\cdot z10$, $z2=6p\cdot z10$, $z3=6p\cdot z10$, $z4=p\cdot z10$, $z5=9\cdot z10$, $z6=3\cdot z10$. $z7=1\cdot z10$, $z8=3\cdot z10$, $z9=2\cdot z10$ und $z10=1/(19+27\cdot p)$, findet man anhand $M=P'\cdot(M - M_{dg}) + E$ die Transit-Matrix

$$M=\begin{pmatrix}
\frac{19}{18p}+\frac{3}{2} & \frac{19}{2p}+\frac{27}{2} & \frac{19}{6p}+\frac{9}{2} & \frac{19}{p}+27 & 1 & \frac{40}{27p}+3 & \frac{53}{9p}+9 & \frac{44}{27p}+3 & \frac{49}{18p}+\frac{9}{2} & \frac{6}{p}+9\\
\frac{19}{18p}+\frac{3}{2} & \frac{19}{2p}+\frac{27}{2} & \frac{19}{6p}+\frac{9}{2} & \frac{19}{p}+27 & 1 & \frac{40}{27p}+3 & \frac{53}{9p}+9 & \frac{44}{27p}+3 & \frac{49}{18p}+\frac{9}{2} & \frac{6}{p}+9\\
\frac{19}{18p}+\frac{3}{2} & \frac{19}{2p}+\frac{27}{2} & \frac{19}{6p}+\frac{9}{2} & \frac{19}{p}+27 & 1 & \frac{40}{27p}+3 & \frac{53}{9p}+9 & \frac{44}{27p}+3 & \frac{49}{18p}+\frac{9}{2} & \frac{6}{p}+9\\
\frac{19}{18p}+\frac{3}{2} & \frac{19}{2p}+\frac{27}{2} & \frac{19}{6p}+\frac{9}{2} & \frac{19}{p}+27 & 1 & \frac{40}{27p}+3 & \frac{53}{9p}+9 & \frac{44}{27p}+3 & \frac{49}{18p}+\frac{9}{2} & \frac{6}{p}+9\\
\frac{19}{18p}+\frac{1}{2} & \frac{19}{2p}+\frac{25}{2} & \frac{19}{6p}+\frac{7}{2} & \frac{19}{p}+26 & \frac{19}{9}+3p & \frac{40}{27p}+2 & \frac{53}{9p}+8 & \frac{44}{27p}+2 & \frac{49}{18p}+\frac{7}{2} & \frac{6}{p}+8\\
\frac{89}{81p}+\frac{2}{3} & \frac{126}{27p}+11 & \frac{260}{81p}+\frac{11}{3} & \frac{164}{9p}+25 & \frac{17}{27p}+1 & \frac{19}{3}+9p & \frac{119}{27p}+6 & \frac{61}{27p}+3 & \frac{62}{27p}+3 & \frac{47}{9p}+7\\
\frac{31}{27p}+1 & \frac{103}{18p}+\frac{15}{2} & \frac{88}{27p}+4 & \frac{52}{3p}+24 & \frac{4}{9p}+1 & \frac{52}{27p}+3 & 19+27p & \frac{56}{27p}+3 & \frac{19}{6p}+\frac{9}{2} & \frac{13}{3p}+6\\
\frac{173}{162p}+\frac{5}{6} & \frac{260}{27p}+13 & \frac{172}{81p}+\frac{7}{3} & \frac{169}{9p}+26 & \frac{13}{27p}+1 & \frac{53}{27p}+3 & \frac{172}{27p}+9 & \frac{19}{3}+9p & \frac{58}{27p}+3 & \frac{52}{9p}+8\\
\frac{31}{27p}+1 & \frac{80}{9p}+12 & \frac{119}{54p}+\frac{5}{2} & \frac{52}{3p}+24 & \frac{4}{9p}+1 & \frac{52}{27p}+3 & \frac{19}{3p}+9 & \frac{56}{27p}+3 & \frac{19}{2}+\frac{27}{2}p & \frac{13}{3p}+6\\
\frac{25}{18p}+\frac{3}{2} & \frac{20}{3p}+9 & \frac{22}{9p}+3 & \frac{13}{p}+18 & \frac{1}{3p}+1 & \frac{47}{27p}+3 & \frac{56}{9p}+9 & \frac{53}{27p}+3 & \frac{55}{18p}+\frac{9}{2} & 19+27p
\end{pmatrix}.$$

Für p=1/n mit n=6 ergibt sich in drei Nachkommastellen die spezielle Matrix

$$M_{p=1/6} = \begin{pmatrix} 7.833 & 70.5 & 23.5 & 141 & 1 & 11.888 & 44.333 & 12.777 & 20.833 & 45 \\ 7.833 & 70.5 & 23.5 & 141 & 1 & 11.888 & 44.333 & 12.777 & 20.833 & 45 \\ 7.833 & 70.5 & 23.5 & 141 & 1 & 11.888 & 44.333 & 12.777 & 20.833 & 45 \\ 7.833 & 70.5 & 23.5 & 141 & 1 & 11.888 & 44.333 & 12.777 & 20.833 & 45 \\ 6.833 & 69.5 & 22.5 & 140 & 2.611 & 10.888 & 43.333 & 11.777 & 19.833 & 44 \\ 7.259 & 61.222 & 22.925 & 134.333 & 4.777 & 7.833 & 32.444 & 16.555 & 16.777 & 38.333 \\ 7.888 & 41.833 & 23.555 & 128 & 3.666 & 14.555 & 23.5 & 15.444 & 23.5 & 32 \\ 7.240 & 70.777 & 15.074 & 138.666 & 3.888 & 14.777 & 47.222 & 7.833 & 15.888 & 42.666 \\ 7.888 & 65.333 & 15.722 & 128 & 3.666 & 14.555 & 47 & 15.444 & 11.75 & 32 \\ 9.833 & 49 & 17.666 & 96 & 3 & 13.888 & 46.333 & 14.777 & 22.833 & 23.5 \end{pmatrix}.$$

Die Werte zeigen für $i\in\{1,2,3,4\}$ und $j\neq 5$ : $m_{i,5} + m_{5,j} = m_{i,j}$ , also der stets sichere Spielschritt ohne Wurf von ZA=Z1uZ2uZ3uZ4 nach Z5 zusammen mit der mittleren Schrittzahl von Z5 nach einem Zustand Zj ergibt die mittlere Schrittzahl von Zi nach Zj . Insbesondere fordert die Passage vom Start in ZA=Z1uZ2uZ3uZ4 nach Z4 im Mittel 141 Spielschritte, davon erfolgen um Mittel $zD\cdot 141 = 114$ durch Würfe, wobei $zD=z5+z6+...+z10= 19\cdot z10 = 19/(19+27p) = 19/23.5 = 19\cdot 6/141 =114/141$ die Wahrscheinlichkeit für einen Spielschritt in ZD=Z1uZ2uZ3uZ4, also durch Wurf bewirkten Schritt. Wie man leicht sieht, liefert dies allgemeine M für p=1/6 das oben auf dem Weg über die spezielle Fundamentalmatrix Z gefundene spezielle Matrix M.

## Schlussakkord der fundamentalen Transit-Variation

Die Transitmatrix M liefert im Spiel „4 nach 2x2 und 1x1 gewinnt" bei Verwendung eines regelmäßigen Polyeders als Würfel mit n Flächen mittels p=1/n die Passagezeit vom Zustand Zi zum Zustand Zj für $i,j\in\{1,2,3,4,5, 6,7,8,9,10\}$. Bei Verwendung eines platonischen Körpers als Würfel sind beim Einsatzbetrag eb= 1 Chip pro Wurf folgende Gewinnbeträge fair:
76 Chip beim Tetraeder (n=4), 114 Chip beim Hexaeder (n=6), 152 Chip beim Oktaeder (n=8),
228 Chip beim Dodekaeder (n=12), 380 Chip beim Ikosaeder (n=20).
Beispielsweise hat man beim Würfeln eines Tetraeders die Passagezeit $m(1,4)= 27+19\cdot n = 114$ vom Zustand Z1 nach Z4 und gleichfalls von Z2, Z3 oder Z4 nach Z4 , also einem Zustand von ZA=Z1uZ2uZ3uZ4 nach Z4 . Von diesen 114 Schritten erfolgen mit der Wahrscheinlichkeit $zD= 19\cdot n/(19\cdot n +27) =76/114$ die Spielschritte durch Würfe, also $zD\cdot m(1,4)= 19\cdot n= 76$ Schritte. Damit ist mit einem Tetraederwürfel beim Einsatz von 1 Chip pro Wurf der Gewinn von 76 Chip fair.

**Kurzweg-Variation**

Die Gewinnbeträge sind stets ein Vielfaches von 19 des Einsatzes. Das lässt sic h mit einem von ZA nach Z5 kurzgeschlossenen Übergang durch Abwandlung der Matrix P' in eine Matrix P'' erkennen . In ihrer Kette gibt es nur Schritte, in denen der Würfel fällt. Der Ausstieg nach ZA und Wiedereinstieg in Z5 ist kurzgeschlossen Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten ist
$P''=(p''_{i,j})$ für $i,j\in\{5,6,7,8,9,10$ und hat die Form

$$P''= \begin{pmatrix} 1-2\cdot p & p & 0 & p & 0 & 0 \\ p & 1-3\cdot p & p & 0 & p & 0 \\ 2\cdot p & 0 & 1-3\cdot p & 0 & 0 & p \\ 2\cdot p & 0 & 0 & 1-3\cdot p & p & 0 \\ 2\cdot p & 0 & 0 & 0 & 1-3\cdot p & p \\ 3\cdot p & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-3\cdot p \end{pmatrix}$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten der Matrix R von P in der Absorptions-Variation, also die von ZD nach ZA in Matrix P , sind gemäß dem ‚Kurzweg' in die erste Spalte der Matrix Q aufsummiert hineingenommen. Jeder Schritt ist ein Wurf.

## Durchführung

Ausgehend von der Wahrscheinlichkeits-Verteilung $x_0=(1,0,0,0,0,0)$, die den sicheren Einstieg in Z5 beim Start eines Spiels beschreibt, ergibt sich rekursiv mit $x_{k+1}= x_k$ P'' für k=1,2,3,... eine reguläre Markoffkette, die hier bei p=1/6 für k=35 auf sechs Nachkommastellen gerundet die Verteilung $x_{35}$ =(0.473684 , 0.157895 , 0.052632 , 0.157895 , 0.105263 , 0.052632) zeigt, was auf eine stationäre Verteilung zs=(9/19 , 3/19 , 1/19 , 3/19 , 2/19 , 1/19) für $k\rightarrow\infty$ hindeutet.
Aus dem Ansatz zs=(z5,z6,z7,z8,z9,z10) mit zs P'' = zs und z5+z6+z7+z8+z9+z10 =1 für die stationäre Verteilung zs der Matrix P'' ergeben sich analog wie in der stationär-regulären die Gleichungen $3\cdot z6=z5$, $3\cdot z7=z6$, $3\cdot z8=z5$, $3\cdot z9=zz6+z8$, $3\cdot z10=z7+z9$ sowie $9 = 19\cdot z5$.
Damit hat die stationäre Verteilung der Matrix P'' die Werte 9/19, 3/19 ,1/19, 3/19 . 2/9, 1/19 alias

0.473684 , 0.157895 , 0.052632 , 0.157895 ,  0.105263 , 0.052632  .
Die Verteilungswerte hängen nicht von p=1/n für $n\in\{4,5,6, ... \}$ ab.
Die Potenzen $(P'')^k$ für $k \to\infty$ konvergieren gegen eine Matrix A mit diesen Werten in jeder Zeile.

Im Zustand Z10 ist man on the long run mit der Wahrscheinlichkeit z10= 1/19.  Dort würfelt man mit der Wahrscheinlichkeit p=1/n eine 4 und nimmt in diesem Fall auf dem Kurzweg nach Z4 den Gewinn mit.   Somit erzielt man auf dem Zyklus von Z5 nach Z5 mit der Wahrscheinlichkeit  $z10\cdot p = 1/19 \cdot 1/n = 1/(19\cdot n)$ den Gewinn. Im Mittel erfordert das $19\cdot n$ Schritte. Jeder Schritt ist ein Wurf.
Das $19\cdot n$ -fache des Einsatzes ist also stets ein fairer Gewinn.

## Abgesang

Mit einem symmetrischen Polyeder mit n Flächen als Würfel ist das Spiel beim Gewinnbetrag
$gb = 19\cdot n\ eb$ ,  eb = Einsatzbetrag, fair.
Ein üblicher Würfel ist symmetrisch und hat sechs Flächen.
Der Gewinn von 114 Chip im Spiel  „Jeder Wurf ein Chip,  4 nach 2x2 und 1x1 gewinnt. “
ist  mit einem üblichen  Würfel fair.

———

Als Vorlage zur Gestaltung des Opus diente die Darstellung der Markoffketten-Theorie in
Kemeny/Snell , Finite Markov Chains,  D.van Nostrand , Company, Inc . 1960 ,London
The University Series in undergraduate Mathematics.

Symmetrische Polyeder zum Würfeln , darunter die fünf platonischen Körper, findet man im Internet
www.thediceshoponline.com

Chessex Air speckled 7 Dice Polyset

## Ausblend-Variation

Mit einem Dankgesang erweiterte Arnold Schönhage zum Jahresende 2010 den Variationen-Reigen.

### Eröffnung

Im Spiel mit einem Tetraeder und seinen 4 Möglichen Wurfergebnissen ***1, 2, 3, 4*** wird das Kommen der Fläche mit der Ziffer ***3*** als den Spielfluss bremsende kostensteigernde Niete ausgeblendet.
Es werden nur Zustände mit den Ausgängen ***1, 2, 4*** in jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit 1/3 betrachtet, dann aber zum Preis eb = 4/3 Chip für solche Schritte.
Man kann dies mit einem üblichen Würfel spielen, indem man gegenüberliegende Flächen zusammenfasst, man also identifiziert ***1*** = {1, 6}, ***2*** = {2, 5} und ***4*** = {4, 3} .
Ein symmetrisches Polyeder mit n = 6 Flächen , also ein üblicher Würfel kann so zum würfeln benutzt werden.
Im Spielablauf gibt es folgende 6 Zustände $Z_0$, $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$, $Z_4$, $Z_5$ .
$Z_0$ als *Start* mit Übergängen $1 \to Z_0$ (bei ***4*** ), $1 \to Z_1$ (bei ***1*** ), $1 \to Z_2$ (bei ***2*** ),
$Z_1$ = für *eine 1* mit Übergängen $2 \to Z_0$ (bei ***1,4*** ), $1 \to Z_3$ (bei ***2*** ),
$Z_2$ = für *eine 2* mit Übergängen $1 \to Z_0$ (bei ***4*** ), $2 \to Z_3$ (bei ***1,2*** ),
$Z_3$ = für *1,2 oder 2,2* mit Übergängen $2 \to Z_0$ (bei ***1,4*** bzw. ***2,4***), $2 \to Z_3$ (bei ***2*** bzw. ***1*** ),
$Z_4$ = für *1,2,2* mit Übergängen $2 \to Z_0$ (bei ***1,2*** ), $1 \to Z_5$ (bei ***4*** ),
$Z_5$ = für *Gewinn von g ·eb* mit kostenfreiem Übergang zum Startzustand $Z_0$ (ohne Wurf).

### Durchführung

Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten mit p= 1/3 ist $P^* = \begin{pmatrix} p & p & p & 0 & 0 & 0 \\ 2\cdot p & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 2\cdot p & 0 & 0 \\ 2\cdot p & 0 & 0 & 0 & p & 0 \\ 2\cdot p & 0 & 0 & 0 & 0 & p \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

P* erzeugt eine reguläre Markoff-Kette. Deren stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung
$s = (s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ ergibt sich aus dem Gleichungssystem
$s P^* = s$ und $s_0 + s_2 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = 1$ , speziell also aus den Gleichungen
$p\, s_0 = s_1 = s_2$ alias $3s_1 = 3s_2 = s_0$ , $p\, s_1 + 2p\, s_2 = s_3$ alias $3s_3 = s_1 + 2s_2$ , $p\, s_3 = s_4$ alias $3\, s_4 = s_3$,
$p\, s_4 = s_5$ alias $3\, s_5 = s_4$ und aus
$s = s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = (1 + 1/3+ 1/3 + 1/3+ 1/9+ 1/27)\, s_0 = (1+ 57/27) s_0 = 1$.
Damit ist $s_0 = 27/(27+57) = 27/84$ .
Der Renovierungsschritt mit der Wahrscheinlichkeit $s_0$ zum stets neuen Start in $Z_0$ erfolgt kostenfrei.
Den Einsatzbetrag eb= 4/3 Chip fordern die Schritte in $Z^* = Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3 \cup Z_4 \cup Z_5$ , die ‚on the long run' mit der Wahrscheinlichkeit $s^* = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = 57/27\, s_0 = 57/84$ auftreten.
On the long run sind also im Mittel von jeweils 84 Schritten stets 57 mit dem Einsatz eb = 4/3 Chip zu bezahlen. Das Spiel ist mit dem Gewinnbetrag von 57 eb = 76 Chip fair.

Dies Ergebnis ergibt sich aus folgender Argumentation:
Als *stationäre* Lösung betrachtet man $s_i$ Spieler, die sich just im Zustand $Z_i$ befinden. Es folgen mittels jener $p_{i,j}$ die 6 homogenen Gleichungen $3s_1 = 3s_2 = s_0$ , $3s_3 = s_1 + 2s_2$ , $3\, s_4 = s_3$, $3\, s_5 = s_4$ und $3s_0 = s_0 + 2s_1 + s_2 + 2s_3 + 2s_4 + 3s_5$ , die –per $s_0 = 27$ normiert– mühelos $s_1 = s_2 = s_3 = 9$, $s_4 = 3$ und $s_5 = 1$ liefern. Also kommen auf den einen Gewinn g dieses "$s_5$" im Mittel 57 Einheiten für die jeweils nächsten (vielleicht auf $Z_5$ führenden) Züge all der anderen Spieler.

### Ausklang

Wie bei all solchen Spielen ist die Fairness bei Mittelwert ±0 ‚on the long run' natürlich selbst bei sehr langem (gar ewigem) Leben problematisch, da man mit Wahrscheinlichkeit 1 irgendwann (nach sehr langen Spielrunden ) ruiniert sein wird –oder die Spielbank!
Der wahre Gewinn liegt eben darin, dass man *spielen darf*, so wie man beim Wandern lernt:

*Der Weg ist das Ziel.*