Berechnung eines GSA

Manuskript zum Vortrag vom 12.12.1991 bei der Firma NSM in Bingen/Rhein
(In Word fürs Internet geschrieben am 30.09.2010)

Resumé

Es werden Methoden zur Berechnung von Geldspielautomaten dargelegt, die ich bereits im Jahre 1967 anwandte. Mitte der 60er Jahre traten in den Spielsystemen „goldene Serien" alias Sonderspielserien auf. Dies führte 1967 in einer Diskussion mit Arnold Schönhage während eines Campingurlaubs am Strand der Nordsee-Insel Sylt zur Konzeption von Rechenmodellen, in denen Zustandsräume, Übergangs- sowie momentane als auch stationäre Wahrscheinlichkeiten der Zustände zur Beschreibung der statistischen Gleichgewichtslage eines GSA eingeführt wurden.
Nach einem Blick in die mathematische Literatur fanden wir, dass sich dieses Konzept in die seit ca. anno 1905 bekannte Theorie der regulären Markoff-Ketten einordnen lässt. Im Rahmen der Theorie der Markoff-Ketten lassen sich derartige Rechenmodelle unter Bezug auf reguläre Ketten als auch absorbierende gestalten, siehe dazu: Kemeney/Snell, Finite Markov-Chains , v.Nostrand Comp. 1960.
Im Folgenden werden vier Methoden zur Berechnung von Zustandswahrscheinlichkeiten unter exemplarischen Bezug auf einen sehr einfach konzipierten GSA dargelegt. Die Methoden M1, M2 fußen auf regulären Ketten, in M3, M4 werden absorbierender Markoff-Ketten herangezogen.
Die Strukturierung des Zustandsraums ist oft ein entscheidender Schlüssel für die Berechenbarkeit eines mit derzeit üblichen Spielsystemen gestalteten Geldspielautomaten, auch bei den gegebenen Hilfen durch leistungsfähige Computer. Es zeigen sich in der Praxis stets Grenzen bei der Erstellung eines statistischen Gutachtens. Mitunter liegen sie in der Angemessenheit des zeitlichen Aufwandes. Der Einbezug von Schätzwerten anhand naheliegender Schätzfunktionen als auch von Ergebnissen statistischer Simulationen öffnet dann einen gangbaren Weg.
Als Beispiel einer statistischen Berechnung zeige ich ein (leicht abgewandeltes) einfach strukturiertes Gerät der Firma Wulff aus dem Jahr 1967, bei dem durch „Normalspiele" und „Sonderspiele" eine Zerlegung des Spielsystems in insgesamt 15 Zustände bewirkt wurde. In derzeitigen Spielgeräten mit zusätzlichen Spielelementen sind Rechenmodelle mit 300 Zuständen und mehr erforderlich, um das Spielsystem näherungsweise hinreichend genau zu erfassen. Dabei wird der Einfluss der zusätzlichen Spielelemente auf die Wahrscheinlichkeiten im Zustandsraum dann lediglich abgeschätzt, nachdem deren statistisches Verhalten anhand von Markoff-Ketten analysiert wurde. Als Beispiel zeige ich die statistische Behandlung eines Spielelements „G1" in einem Geräts, das ich kürzlich begutachtete.

A. Beschreibung des Wulff-Geräts

(In Anlehnung an mein Gutachten vom 21.12.1967 zur Vorlage bei der PTB Berlin)
Das Gerät hat 3 Walzen à 10 Felder. Es erlaubt Normalspiele sowie Sonderspiele.

Symbol-Belegung der Felder auf den Walzen

W1:	K/10	S/5	5/4	7/4	7/4	2/4	2/6	2/6	2/8	2/8
W2:	K	10	8	6	6	5	4#	4#	2#	2#
W3:	K/10	S/5	5/4	7/4	7/4	2/4	2/6	2/6	2/8	2/8

\# =schraffiertes Feld der W2

Normalspiel-Zustand: Z_0 Sonderspiel-Zustände: $Z_1, Z_2, Z_3, ..., Z_{14}$; $Z_s = Z_1 \cup Z_2 \cup ... \cup Z_{14}$.

Walzenkombinationen für Geld-Gewinne E= Betrag des Einsatzes pro Spiel = -.10DM

in Z_0 :	10E	8E	7E	6E	5E	4E	2E	1E
	101010	888		666	555	444	222	xKz, $x \neq z$
	10K10	8K8	7K7	6K6	5K5	4K4	2K2	
	SKS							

Bei mehrdeutigen Kombinationen wird stets nur der höhere Betrag gegeben.

in Z_s : 10E bei xKz, x#z, 101010, 888, 666, 555 , wobei x, z beliebiges Felder der W1, W3 .

Walzenkombinationen für Sonderspiel-Gewinne (S= Sonderspiel)
in Z_0 : 14S bei KKK , 10S bei SKS (Zustandswechsel von Z_0 nach Z_{14} bzw. Z_{10})
in Z_s : $Z_j \rightarrow Z_{14}$ für j= 1,2,3,...,14 bei KKK, SKS (Zustandswechsel nach Z_{14})

Das Spielsystem des Wulff-Geräts war hier etwas anders gestaltet: Vom Normalspiel-Zustand Z_0 her gab es bei KKK den Wechsel nach Z_{10} und bei SKS nach Z_5 und vom Zustand $Z_{j,}$ $j \in \{1.2..3,...,14\}$ her gab es bei KKK eine „Aufstockung" der laufenden Sonderspielserie um maximal 10 und bei SKS um maximal 5 zusätzliche Sonderspiele, dabei stets höchstens bis zum Sonderspielzustand Z_{14} .

Spielablauf: 1. Alle drei Walzen starten
2. Walze W1 stoppt, kann nachgestartet werden
3. Alle laufenden Walzen stoppen

Strategien: Blindspiel (Spiel ohne Nachstart der W1)
Nachstart der W1 in Abhängigkeit vom Stand der W1 (7 versch. W1-Stände in Z_0)
Es sind grob 2^7=128 Möglichkeiten des Nachstarts in Abhängigkeit vom Stand der W1 in Z_0 und 2^3=8 Möglichkeiten in Z_s zu unterscheiden, das liefert bereits 2^{10} =1024 Nachstart-Strategien und häufig war der Frage nachzugehen, welche Strategie optimale Geldspielerwartung „on the long run" liefert.

B Berechnung des Blindspiels beim Wulff-Gerät

1) Wahrscheinlichkeiten für E-Gewinne in Z_o

	10E	8E	7E	6E	5E	4E	2E	1E
g_0 =	(3+	8+	4+	12+	7+	43+	66+	56)/1000 = 19,9%

Geld-Erwartung in Z_0

: E_0 = (30+ 64+ 28+ 72+ 35+ 172+ 132+ 56)dE/1000 = 58,9% dE

2) Wahrscheinlichkeiten für E-Gewinne in Z_s

g_s = (500+ 1+ 4+ 8+ 4)/1000 = 51,7%
Geld-Erwartung in Z_s
E_s = 5170dE/1000 = 517% dE

3) Wahrscheinlichkeiten für Sonderspiel-Gewinne (Zustandswechsel)

in Z_o $Z_0 \to Z_{14}$ bei KKK (14S) a_1=1/1000
$Z_0 \to Z_{10}$ bei SKS (10S) a_2=1/1000

in Z_s $Z_j \to Z_{14}$ für j = 1,2,3,...,14 bei KKK b_1=1/1000
$Z_j \to Z_{14}$ für j = 1,2,3,...,14 bei SKS b_2=1/1000

Matrix P der Übergangswahrscheinlichkeiten, wobei $s_0 = a_1+a_2$, $s = b_1+b_2$ gesetzt:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{array} \\
P=\begin{pmatrix}
1-s_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\
1-s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2+b_1 \\
0 & 1-s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2+b_1 \\
0 & 0 & 1-s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2+b_1 \\
0 & 0 & 0 & 1-s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2+b_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1-s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2+b_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2+b_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2+b_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2+b_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2+b_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2+b_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s & 0 & 0 & 0 & b_2+b_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s & 0 & 0 & b_2+b_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s & 0 & b_2+b_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s & b_2+b_1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

4) Berechnung der stationären Wahrscheinlichkeiten der 15 Zustände

Durch obige Matrix $P=(p_{i,j})$ der Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i,j}$ mit $i,j \in \{1,2,3,,,,14\}$ ist, ausgehend von einer Anfangs-Verteilung $z_0 = (z_{0,0}, z_{0,1}, z_{0,2}, ..., z_{0,14})$ rekursiv eine Kette momentaner Verteilungen $z_k = (z_{k,0}, z_{k,1}, z_{k,2}, ..., z_{k,14})$ für k=1,2,3,... gegeben, deren stationäre Verteilung $w = (w_0, w_1, w_2, ..., w_{14})$ „on the long run" zu bestimmen ist . Das lineare Gleichungssystem (GS) der stationären Verteilung mit 16 Gleichungen und 15 Variabelnx$_0$, $x_1, x_2, ..., x_{14}$ ist im Matrizenkalkül notiert

$(x_0, x_1, x_2, ..., x_{14}) = (x_0, x_1, x_2, ..., x_{14})\,P$ und $\sum_{j=0}^{14} x_j = 1$ mit obigem $P=(p_{i,j})$. (GS)

Elementare Wege zur Lösung des Gleichungssystems

a) Man setzt anfangs frei den Startwert $x_0 = 1$, errechnet rekursiv

$x_1 = q \cdot s_0 \cdot x_0$, $x_2 = q \cdot x_1$, $x_3 = q \cdot x_2$,…, $x_{10} = q \cdot x_{11}$, $x_{11} = q \cdot (x_{10} - a_2 \cdot x_0)$, $x_{12} = q \cdot x_{11}$,…, $x_{14} = q \cdot x_{13}$

wobei $q=1/s = 1{,}002004$ mit $s = b_1+b_2 = 0{,}002$ und bildet die Summe $x_s = x_0+x_1+...+x_{14}$.

Zur Probe der Rechnung kann Gleichung $x_{14} = a_1 \cdot x_0 + + b_1 \cdot (x_1+...+x_{14}) + b_2 \cdot (x_1 +...+x_{14})$ dienen.

Die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Raum $Z_0 \cup Z_1 \cup Z_2 \cup ... \cup Z_{14}$ aller Zustände.

ist dann $w_0 = (x_0/x_s , w_1=x_1/x_s , w_2=x_2/x_s , ..., w_{14}=x_{14}/x_s)$.

b) Man setzt $w_0 = 1/(q^{14} + a_2 /s_0 \cdot (q^4 - 1))$ und rechnet wie oben $w_1=q \cdot s_0 \cdot w_0$, $w_2=q \cdot w_1$, $w_3=q \cdot w_2$,… .

Wahrscheinlichkeiten der Zustände Z_0 und Z_s

$w_0 = 0{,}976177$, $w_s = 1- w_0 = 0{,}023823$.

5) Blindspielerwartung

$E_{Blindspiel} = w_0 \cdot E_0 + ws \cdot E_s$ = 57,50% dE + 12,31% dE = 69,81% dE

6) Häufigkeiten der Gewinnklassen bei 3 400000 Spielen im Blindspiel

Wahrscheinlichkeit		Häufigkeit
10E: $g_0(10E) \cdot w_0 + g_s(10E) \cdot w_s$	= 1,5245%	h(10E)= 51833
8E: $g_0(8E) \cdot w_0$	= 0,7809%	h(8E)= 26552
…		…
1E: $g_0(1E) \cdot w_0$	= 0,7809%	h(8E)= 26552
14S: $a_1 \cdot w_0 + b_1 \cdot w_s$	= 0,1%	h(14S)= 3400
10S: $a_2 \cdot w_0 + b_2 \cdot w_s$	= 0,1%	h(14S)= 3400

C. Allgemeiner Ansatz des Lösungs-Verfahrens

Vorgelegt sind

a) Zustände $Z_0, Z_1, Z_2, ..., Z_n$ **,** deren Vereinigung alle möglichen Zustände erfasst.

Für stationäre als auch momentane Zustandwahrscheinlichkeiten $z_0, z_1, z_2, ..., z_n$ ist somit stets

$\sum_{j=0}^{n} z_j = 1$ mit $z_j \geq 0$ für $j \in [0,1,2,...,n\}$. Es sind „stochastische“ Vektoren (Wkts-Verteilungen) .

b) Wahrscheinlichkeiten $p_{i,j} \geq 0$ für schrittweise Übergänge $Z_i \rightarrow Z_j$ für $i,j \in \{0,1,2,...n\}$,

wobei $\sum_{j=0}^{n} p_{i,j} = 1$ für alle $j \in \{0,1,2,...n\}$.

Die Zeilen der Matrix $P = (p_{i,j})$ sind somit „stochastische“ Vektoren.

Der Prozess der schrittweisen Änderung der momentanen Zustandswahrscheinlichkeiten wird anhand der „stochastischen“ Matrix $P=(p_{i,j})$ der Übergangswahrscheinlichkeiten durch

$(z'_0,z'_1,z'_2, ...,z'_n) = (z_0,z_1,z_2, ...,z_n) P$, kurz $z' = z P$ notiert, beschrieben, wobei

$z_0, z_1, z_2, ..., z_n$ die momentanen Zustandswahrscheinlichkeiten vor einem Übergang und

$z'_0, z'_1, z'_2, ..., z'_n$ die Zustandswahrscheinlichkeiten nach dem Übergang.

Im Modell zur statistischen Berechnung eines Spielautomaten sind die Bezeichnungen wie im zuvor dargelegten Beispiel zu interpretieren. Demnach ist Z_0 der Normalspiel-Zustands des Geräts und die Vereinigung $Z_s=Z_1 \cup Z_2 \cup ... \cup Z_n$ der Zustand, in einer Sonderspiel-Serie zu sein. Im Detail ist dabei Z_i für $i \in \{1,2,...n\}$, der Zustand, des Spielgeräts, bei dem in der Regel i Sonderspiele bis zum Ausstieg, also dem Wechsel von $Z_s=Z_1 \cup Z_2 \cup ... \cup Z_n$ nach Z_0 in Form von $Z_1 \rightarrow Z_0$ noch vorliegen.

Im Beispiel wurde eine stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung $(w_0, w_1, w_2, ..., w_n)$ des Zustandsraums $Z = Z_0 \cup Z_s$ gesucht, also Zustandswahrscheinlichkeiten derart, dass

$$(w_0, w_1, w_2, ..., w_n) = (w_0, w_1, w_2, ..., w_n) P \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{n} w_j = 1 \,. \qquad \text{(GS1)}$$

Bei „regulärer“ stochastischen Matrix P ist der Vektor $w =(w_0, w_1, w_2, ..., w_n)$ eindeutig bestimmt und ergibt sich, ausgehend von einer frei gewählten Wahrscheinlichkeitsverteilung, also einem

stochastischem Startvektor $z_0 =(z_{0,0}, z_{0,1}, z_{0,2}, ..., z_{0,n})$ mit $\sum_{j=0}^{n} z_{0,j} = 1$ und $z_{0,j} \geq 0$ $j \in \{0,1,2,...n\}$, iterativ

als Grenzwert der rekursiv definierten Folge momentaner Wahrscheinlichkeitsverteilungen

$z_k = (z_{k,0}, z_{k,1}, z_{k,2}, ..., z_{k,n})$, wobei dann $w = \lim z_k = z_\infty$ mit $z_k = z_{k-1} P$ für $k =1,2,3,...\rightarrow\infty$. (∗)

Methoden zur Bestimmung von $w = (w_0, w_1, w_2, ..., w_n)$

M1 $w = (w_0, w_1, w_2, ..., w_n)$ ist die stationäre Verteilung einer regulären Markoff-Kette. Das obige System (GS1) ist computergestützt iterativ oder algebraisch zu lösen.

M2 $w = (w_0, w_1, w_2, ..., w_n) = z_\infty$, wobei z_∞ die Grenzverteilung gemäß $(*)$. In der Praxis benötigt man computergestützt für eine brauchbare Näherung z_k dieser Grenzverteilung z_∞ einer regulären Markoff-Kette oft bis zu $k \approx 1000$ Schritte.

M3 Abwandlung der Matrix $P=(p_{i,j})$ in die Matrix $P_a = \begin{pmatrix} 1 & V \\ R & Q \end{pmatrix}$ mit $V=(0,0,...,0)$ in der oberen Zeile und weiterhin $R=(p_{1,0}, p_{2,0}, ..., p_{n,0})$ in der linken Spalte und $Q=(p_{i,j})$ für $i,j \in \{1,2,3,...,n\}$.
Die Matrix P_a erzeugt eine absorbierende Kette mit Z_0 als einzigem absorbierenden Zustand, alle anderen sind Durchgangszustände, wobei die Wahrscheinlichkeiten auf den Plätzen $R_{1,0}$, $R_{2,0}$,...,$R_{n,0}$ in R Übergänge zum absorbierenden Zustand Z_0 beschreiben und die auf den Plätzen der Matrix Q interne Durchgänge, die ganz im Bereich nicht absorbierender Zustände verbleiben. Zufolge $R=(p_{1,0}, 0,..., 0)$ mit $p_{1,0} > 0$ gibt es ein Abfließen von Wahrscheinlichkeit (relativer Häufigkeit) aus dem Raum $Z_s = Z_1 \cup Z_2 \cup ... \cup Z_n$ der Durchgangszustände und zwar hier einzig aus Z_1. Demnach ist $\lim Q^k$ =Nullmatrix für $k \to \infty$. Das sichert die Konvergenz in folgendem **Rekursions-Verfahren:** Start mit

$y_0 = (0|x_0)$ mit $x_0 = (p_{0,1}, p_{0,2}, ..., p_{0,n})$ und $zs_0 = (1-s_a \mid V)$ mit $s_a = \sum_{j=1}^{n} p_{0,j} > 0$, $V=(0,,...,0)$ und

dann schrittweise rekursiv $y_k = (u_k, x_k)$, wobei

$u_k = x_{k-1} R$ mit $R=(p_{i,0})$, $\sum_{i=1}^{n} p_{i,0} > 0$, und $x_k = x_{k-1} Q$ mit $Q = (p_{i,k})$, wobei $i,k \in \{1,2,3,...,n\}$,

$zs_k = zs_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_k$ für $k = 1,2,3,\ldots$

Im Matrizenkalkül kann man schreiben:

$x_k = x_0 N_{k-1}$ sowie $zs_k = (1-s_a+u_1+...+u_k \mid x_0 \cdot N_k)$ mit $N_k = E + Q + Q^2, +Q^3 + ...+Q^k$, E= Einheitsmatrix.

Es gilt: $\lim zs_k = zs_\infty = (1 \mid x_0 \cdot N)$ mit $N = \lim N_k$ für $k \to \infty$ (Lemma1)

sowie $(1 \mid x_0 \cdot N) P = (1 \mid x_0 \cdot N)$ (Lemma2)

Die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung $w = (w_0, w_1, w_2, ..., w_n)$ der durch P bestimmten regulären Markoff-Kette ergibt hier nach Division des Grenzwerts $\lim zs_k = (1 \mid x_0 \cdot N)$ durch seine Zeilensumme, nach Lemma2 eine stationäre Verteilung von P, also in Form von

$w = 1/zs_{sum} \cdot (1 \mid x_0 \cdot N)$, zs_{sum} die Zeilensumme von $zs_\infty = (1 \mid x_0 \cdot N)$, $(**)$

$N = E+Q+Q^2+Q^3+ ...$ die „Normalmatrix" der durch P_a bestimmten absorbierenden Kette.

In der Praxis benötigt man computergestützt auch hier für eine brauchbare Näherung zs_k an $\lim zs_k = (1 \mid x_0 \cdot N) = z_\infty$ etwa bis zu $k \approx 1000$ Schritte. Einen Stop des Rechenverfahrens kann man zu einem vorgelegten $\varepsilon > 0$ beim k mit $|y_k - y_{k-1}| < \varepsilon$ bewirken. Als Näherung für $w = (w_0, w_1, w_2, ..., w_n)$ dient dann die Verteilung
$1/zs_{k.sum} \cdot zs_k = 1/zs_{k.sum} \cdot (zs_{k,0}, zs_{k,1},,\ldots, zs_{k,n})$, wobei $zs_{k.sum}$ die Zeilensumme von zs_k.

M4 Eine mit M3 verbundene Methode zur Bestimmung der stationären Verteilung $w = (w_0, w_1, w_2, ..., w_n)$ fließt in Verbindung mit $\lim Q^{n+1}$ = Nullmatrix für $n \to \infty$ aus den Ansatz $(E-Q) \cdot (E+Q+Q^2 + Q^3 +...) = E$, also $(E-Q) \cdot N = E$.
N ist die Inverse von $(E-Q)$. Damit ist $\lim zs_k = (1 \mid x_0 \cdot N) = (1 \mid x_0 \cdot (E-Q)^{-1})$ und somit $w = (w_0, w_1, w_2, ..., w_n) = 1/zs_{sum} \cdot (1 \mid x_0 \cdot (E-Q)^{-1})$, zs_{sum} = Zeilensumme von $(1 \mid x_0 \cdot (E-Q)^{-1})$.
Die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung $w = (w_0, w_1, w_2, ..., w_n)$ der durch P bestimmten regulären Markoff-Kette wird hier also mittels der Berechnung von $(E-Q)^{-1}$, also der Umkehrung der Matrix $(E-Q)$ mit $Q = (p_{i,j})$ für $i,j \in \{1,2,3,...,n\}$ ermittelt.

Meine Computerprogrammen zur Bestimmung der stationären Wahrscheinlichkeitsverteilung im konzipierten Zustandsraum eines GSA habe ich anfangs nach Methode M2 gestaltet, sind jedoch seit langem auf Methode M3 gegründet. In meinen Rechenverfahren zur statistischen Analyse spezieller Spielelemente verwende ich hingegen oft die Methoden M1, M2.

D. Spielsystem-Element GAME

GAME ist ein Spielelement eines Spielautomaten, den ich im August 1991 begutachtete
Das Spielelement hat zwei gleichartige Teile G1, G2 und wirkt nur im Normalspiel des GSA.

Beschreibung des Teilsystems G1

G1 besteht aus einem 4-Fenster-Feld (8 | 4 | 2 | 1) , deren Fenster in Abhängigkeit vom Stand der drei Walzen des GSA mit den Wahrscheinlichkeiten

$p_1 = 2{,}6/1728$, $p_2 = 10{,}4/1728$, $p_3 = 120{,}3/1728$, $p_4 = 15{,}2/1728$

ein- bzw. ausgeschaltet werden. Es ist $s = p_1+p_2+ p_3+p_4 = 148{,}5/1728$.

Sind alle 4 Fenster auf „ein" gebracht, wird ein Gewinn gegeben und alle Fenster dann automatisch auf „aus" gesetzt. Die Zustände „volles G1" und „leeres G1" können somit bei der Berechnung des Einflusses auf die Geldspielerwartung des GSA identifiziert werden. Also werden hier aus den $2^4 = 16$ Leucht-Zuständen von G1 die folgenden 15 Zustände des Teilsystems G1 festgelegt: **Zustandsraum des 4-Fenster-Feldes**

	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111 = 0000

Die Zustände $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{14}, Z_{15}$ sind der Reihe nach aufgezählt von 1 bis 15 und dabei steht 1 für „ein" und 0 für „aus" bezüglich der Felderleuchtung.

Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{array} \\ \begin{pmatrix}
1-s & 0 & p_3 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\
0 & 1-s & p_4 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 \\
p_3 & p_4 & 1-s & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1-s & p_4 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & p_2 \\
p_2 & 0 & 0 & p_4 & 1-s & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 \\
0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & 1-s & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 \\
0 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & p_4 & 1-s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s & p_4 & p_3 & 0 & p_2 & 0 & 0 & p_1 \\
p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 1-s & 0 & p_3 & 0 & p_2 & 0 & 0 \\
0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 1-s & p_4 & 0 & 0 & p_2 & 0 \\
0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & p_4 & 1-s & 0 & 0 & 0 & p_2 \\
0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 1-s & p_4 & p_3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & p_4 & 1-s & 0 & p_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & & p_2 & 0 & p_3 & 0 & 1-s & p_4 \\
p_4 & p_3 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s
\end{pmatrix} \end{array}$$

Die Matrix $P = (p_{i,j})$ mit $i,j \in \{1,2,3,\ldots,15\}$ beschreibt eine reguläre Markoff-Kette.

Bestimmung der stationären Wahrscheinlichkeits-Verteilung

Methode M1. $w = (w_1, w_2, w_3, \ldots, w_{15})$ ist Lösung des linearen Gleichungssystems

$(x_1,x_2,x_3, \ldots, x_{15}) = (x_1,x_2,x_3, \ldots, x_{15})\,P$ und $\sum_{j=1}^{15} x_j = 1$. Im Matrizenkalkül kann man dies schreiben:

$$x \cdot (E - P) = \mathbf{o} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{15} x_j = 1 \quad , \mathbf{o} = (0,0,\ldots,0) \text{ der Nullvektor .} \qquad \text{(GS1)}$$

Die 16 Gleichungen für den 15 Variablen $x_1,x_2,x_3, \ldots, x_{15}$ sind linear abhängig vom Rang 15.
Lässt man die anhand der 15-ten Spalte gebildete Gleichung fort, erhält man ein System $x \cdot A = b$, wobei die Matrix A sich von E–P einzig in der letzten Spalte unterscheidet.
Matrix A hat in der letzten Spalte durchweg die Ziffer 1. Zudem ist $b = (0,0,\ldots0, 1)$.
Die Lösung $w = b\,B$ findet man nun mittels $B = A^{-1}$. Man erhält computergestützt so insbesondere $w_7 = 0{,}0888, \ldots, w_{11} = 0{,}0298 , \ldots, w_{13} = 0{,}0061 , w_{14} = 0{,}0236$ und damit folgende Wahrscheinlichkeit für „volles G1": $g_1(1111) = p_1 \cdot w_7 + p_2 \cdot w_{11} + p_3 \cdot w_{13} + p_4 \cdot w_{14} = 0{,}00094$.

Methode M2. Mit dem Startwert $z_0 = (0,0,0,...,0,1)$, also dem Zustand 1111 (=0000) erhält man für $w = (w_0, w_1, w_2, ..., w_{14})$ rekursiv über $z_k = z_{k-1} P$ mit $k = \in\{1,2,3,...\}$ bei k=1000 die Näherung z_{1000} , wobei insbesondere $z_{k,7} = 0{,}08865$, $z_{k,11} = 0{,}02978$, $z_{k,13} = 0{,}00611$, $z_{k,14} = 0{,}02354$
.