F. Ostermann, April 2015

Lichte Tageslängen in Köln

Die lichte Tageslänge ist die Zeit vom Sonnenaufgang bis zum Sonnenuntergang. Sie ist abhängig von der Breite φ des Ortes und dem Tag im Jahr. Den Tag im Jahr charakterisieren wir durch die Deklination δ der Sonne. δ ist die geografische Breite, in der die Sonne im Zenit steht. Man kann δ als Anteil des Neigungswinkels ε in Richtung Sonne sehen und annähernd durch $\delta = \arctan(\tan\varepsilon \cdot \cos(90° - \varphi^*))$ berechnen, dabei ist ab Frühlingspunkt bis Herbstpunkt näherungsweise $\varphi^* = (\text{Anzahl der Tage}/365)\cdot 360°$, $\varepsilon = 23{,}44°$ ist die Abweichung der Erdachse (Polgerade) von der Senkrechten zur Erdbahnebene (Ekliptik). Es gilt stets $-\varepsilon \leq \delta \leq \varepsilon$.

Beispiel:
Tag: Sommersonnenwende (SSW, etwa **20. Juni**)
Ort: Köln
Breitengrad $\varphi = 51°$
Längengrad $\lambda = 7°$ Ost
Bahnwinkel $\varphi^* = 90°$
Deklination $\delta = 23{,}44°$, den aktuellen Wert von δ eines Tages im Jahr findet man in einschlägiger Literatur bzw. im Internet.

Die Höhe der Sonne - d.h. ihr Höchststand an einem Tag - an jedem Ort vom Breitenkreis φ ist in Abhängigkeit vom Tag $h = \delta + \varphi'$, $\varphi' = 90° - \varphi$. φ' ist der Neigungswinkel der Horizontalebene am Ort relativ zur Äquatorebene. Die Äquatorebene liegt senkrecht zur Erdachse. Für Köln ist damit am Tag der Sommersonnenwende

$$h = \delta + 39° = 62{,}44°.$$

Wenn wir die Erde als Punkt O deuten, steht der Beobachter im Schnittpunkt der Polgeraden mit der Äquatorebene. Die Deklination δ ist dann die Höhe der Sonne über der Äquatorebene (Horizontalebene am Nordpol) während der 24 Stunden eines Tagesumlaufs im Sommerhalbjahr. Den täglichen Umlauf der Sonne stellt man sich auf einer Kreisbahn parallel und oberhalb zur Äquatorebene um die Polachse vor. Den Kreismittelpunkt nennen wir M. Der Abstand der Sonne S vom Mittelpunkt M wird $r = |MS| = 1$ gesetzt. Sein Abstand von der Äquatorebene ist

$|OM| = \tan\delta$.

Vom Frühlingsanfang bis zur SSW wächst die Deklination von 0° auf 23,44° und danach sinkt sie auf 0° bis zum Herbstanfang. Im Winter sieht der Beobachter die Sonne unter der Äquatorebene. Sie sinkt bis auf -23,44° und hebt sich danach bis zum Frühlingsanfang wieder auf 0°. Mit einem Standpunkt am Nordpol werden diese Sonnenhöhen im Sommerhalbjahr beobachtet und im Winterhalbjahr vom Standpunkt am Südpol.

Die Horizontalebene für einen Beobachter in Köln ist die Tangentialebene an die Erdkugel in Köln. Sie schneidet die Äquatorebene in einer Geraden durch O. Die Schnittgerade verläuft in der Horizontalebene von Osten nach Westen. Die Senkrechte dazu durch O in der Horizontalebene ist die Mittagslinie (Meridian). Der Erhebungswinkel der Polarachse zur

Horizontalebene ist demnach $\varphi = 51°$. Die Neigung der Horizontalebene in Köln zur Äquatorebene ist dann $\varphi' = 39°$.
Die Horizontalebene schneidet die Kreisbahn der Sonne in der Sehne $S_a S_u$
(S_a Sonnenaufgang, S_u Sonnenuntergang). Der Abstand der Sehne vom Mittelpunkt M des Sonnenkreises zum Mittelpunkt A der Sehne $S_a S_u$ ist $|MA| = \tan\delta\cdot\tan\varphi$.
Am Tag der SSW ist $|MA| = \tan 23{,}44°\cdot\tan 51° = 0{,}5354$.
Die WOZ ab Mitternacht ist für den Sonnenaufgang σ_A in Grad arc cos $|MA| = 57{,}62°$.
Zeit des Sonnenaufgangs $\tau_A = 57{,}62°\cdot 4\text{min/grad} = 3\text{h } 50\text{min}$ WOZ.
Die Dauer der Nacht ist $\tau_A' = 2\tau = 7\text{h } 40\text{min}$.
Die lichte Tageslänge zur SSW ist damit $\tau = 24\text{h} – 7\text{h } 40\text{min} = 16\text{h } 20\text{min}$.
Sonnenaufgang und Sonnenuntergang sind also $\tau' = 0{,}5\cdot\tau = 8\text{h } 10\text{min}$ vor bzw. nach dem Höchststand der Sonne.

In der MEZ hat man den Höchststand der Sonne:
MEZ = 12h WOZ + 32min – ZG ZG ist der Wert der Zeitgleichung an dem betreffenden Tag. Am Tag der SSW ist ZG etwa –2min, am Tag der WSW ist ZG etwa +1min. (den aktuellen Wert eines Tages im Jahr findet man in einschlägiger Literatur bzw. im Internet)

MEZ zur SSW	Sonnenhöchststand	12h 34min
	Sonnenaufgang	12h 34min – 8h 10min = 4h 24min
	Sonnenuntergang	12h 34min + 8h 10min = 20h 44min.

Ort des Sonnenaufgangs bzw. Sonnenuntergangs:
Es ist $\sigma_A = 57{,}62°$, wir setzen $\alpha' = 90° - \sigma_A$, also $\alpha' = 32{,}38°$. Der Winkel α' in der Sonnenkreisebene ist die Orthogonalprojektion des gesuchten Winkels $\omega' = 90° - \omega$ in der Horizontalebene. Es ist
$\omega' = \arctan(\tan\alpha'/\cos\varphi')$
$\omega' = \arctan(\tan 32{,}38°/\cos 39°)$
$\omega' = 39{,}21°$.
Der Beobachter sieht den Sonnenaufgang unter 39,21° nördlich beim Blick gen Osten und den Sonnenuntergang ebenso beim Blick gen Westen.

Am Tag der WSW, etwa **21. Dezember**, kehren sich die Werte um.
Lichte Tageslänge $\tau = 7\text{h } 40\text{min}$

	Sonnenaufgang	12h – 3h 50min =	8h 10min WOZ
	Sonnenuntergang	12h + 3h 50min =	15h 50min WOZ
MEZ = WOZ + 31min	Sonnenaufgang		8h 41min MEZ
	Sonnenuntergang		16h 21min MEZ

Den Sonnenaufgang sieht man 39,21°südlich beim Blick gen Osten, den Sonnenuntergang 39,21° südlich beim Blick gen Westen.
Die Sonne erreicht um 12h 32min MEZ den Höchststand.
Die Mittagshöhe ist $39° - 23{,}44° = 15{,}56°$.

Analog kann man zu einer vorgegebenen Deklination δ, $- 23{,}44° < \delta < 23{,}44°$, für das zugehörige Datum und den betreffenden ZG-Wert im Jahr die lichte Tageslänge sowie Ort und Zeit von Sonnenaufgang und Sonnenuntergang berechnen.

Anmerkung:
Im Rahmen der vektoriellen räumlichen Geometrie ist arc cos($\pm|MA|$) = σ_A,
alias $\tan\varphi \cdot \tan\delta - \cos\sigma_A = 0$, ($\sigma_A$ ist der Winkel zwischen MA und MS) wie folgt zu begründen:
$N_O = (-1,0,\tan\varphi)$ ist ein Normalenvektor der Horizontalebene,
$OS = (\cos\sigma_A,\sin\sigma_A,\tan\delta)$ ist ein um die Erdachse rotierter Sonnenvektor.
Die Orthogonalität der Vektoren N_O und OS wird anhand des inneren Produkts
$(-1, 0, \tan\varphi) \cdot (\cos\sigma_A, \sin\sigma_A, \tan\delta) = 0$ beschrieben
$-\cos\sigma_A + \tan\varphi \cdot\tan\delta = 0$
$\tan\varphi \cdot\tan\delta = \cos\sigma_A$.
Damit liegt der Sonnenzeiger OS in der Horizontalebene.
Das Gleiche gilt für den Winkel $\sigma_U = -\sigma_A$.

Werte an speziellen Tagen im Jahr

Etwa am **20. April und am 21. August** ist δ in grober Näherung 11°; $\varepsilon = 23{,}44°$;
Zeitgleichungswerte ZG etwa +1min am 20.April, ZG etwa – 2min am 21.August
Mit der Faustregel $\varphi^* = \arcsin(\tan\delta/\tan\varepsilon) = \arcsin(\tan 11°/\tan 23{,}44°)$ erhält man
$\varphi^* = 27°$ am 20. 04., $\varphi^* = 153°$ am 21. 08.

$\sigma_A = \arccos(\tan\varphi \cdot \tan\delta)$, $\varphi = 51°$, $\delta = 11°$
$\tau_A = 76°\cdot 4\text{min/grad} = 304\text{min} = 5\text{h } 4\text{min}$ WOZ.

Lichte Tageslänge $\tau = 24\text{h} – 10\text{h } 8\text{min} = 13\text{h } 52\text{min}$.
Lichter halber Tag $\tau/2 = 6\text{h } 56\text{min}$.

Wahrer Mittag MEZ $\mu = 12\text{h} + 32\text{min} – \text{ZG}$
$\mu = 12\text{h } 31\text{min}$ am 24. 04.
$\mu = 12\text{h } 34\text{min}$ am 21. 08.
(Sommerzeit 1 Stunde später als MEZ)

Zeit und Ort des Sonnenaufgangs bzw. Sonnenuntergangs am 20. 04.

Sonnenaufgang 12h 31min – 6h 56min = 5h 35min MEZ
Sonnenuntergang 12h 31min + 6h 56min = 19h 27min MEZ

Ort des Sonnenaufgangs $\omega_A' = \arctan(\tan\alpha'/\cos\varphi')$
$\omega_A' = \arctan(\tan 14°/\cos 39°)$
$\omega_A' = 18°$

Man sieht den Sonnenaufgang 18° nördlich gen Osten und den Sonnenuntergang 18° nördlich gen Westen.

Zeit und Ort des Sonnenaufgangs bzw. Sonnenuntergangs am 21. 08.
Mittagszeit 12h34min MEZ
Sonnenaufgang τ_A = 12h34min – 6h 56min = 5h 38min MEZ
Sonnenuntergang τ_U = 12h 34min +6h 56min = 19h 30min MEZ
Der Ort des Sonnenaufgangs bzw. Sonnenuntergangs ist der gleiche wie im April.

An den Tagen mit $\delta = 0$ **(etwa 21. März, 22. September**) geht die Sonne 6h vor dem wahren Mittag auf und sie geht 6h nach dem wahren Mittag unter.
ZG(März) = - 7min   ZG(September) = +6min
Wahrer Mittag   12h+32min – ZG
März 12h 39min MEZ   September 12h 26min MEZ.

Etwa am **20. Mai und am 20. Juli** ist $\delta = 20°$; $\varepsilon = 23{,}44°$;
Zeitgleichungswerte: ZG etwa +3min , am 20. Juli,   ZG etwa – 6min am 21. August
$\varphi^* = \arcsin(\tan\delta/\tan\varepsilon) = \arcsin(\tan 20°/\tan 23{,}44°)$
$\varphi^* = 62°$ am 20. 05., $\varphi^* = 118°$ am 20. 07.

$\sigma_A = \arccos(\tan\varphi \cdot \tan\delta)$, $\varphi = 51°$, $\delta = 20°$
$\tau_A = 63{,}3° \cdot 4\text{min/grad} = 243{,}2\text{min} = 4\text{h } 3\text{min}$ WOZ.

Lichte Tageslänge τ = 24h – 8h 6min = 15h 54min.
Lichter halber Tag $\tau/2$ = 7h 57min.

Wahrer Mittag MEZ μ = 12h + 32min – ZG
μ = 12h 29min am 20. 05.
μ = 12h 38min am 20. 07.
(Sommerzeit 1 Stunde später als MEZ)

Zeit und Ort des Sonnenaufgangs bzw. Sonnenuntergangs am 20. 05.

Sonnenaufgang   12h 29min – 7h 57min =   4h 32min MEZ
Sonnenuntergang   12h 29min + 7h 57min = 20h 26min MEZ

Ort des Sonnenaufgangs $\alpha = \arctan(1/\cos\varphi' \cdot \tan\alpha')$, $\varphi' = 90° - 51°$, $\alpha' = 90° - \tau_A = 26{,}7$
$\alpha = \arctan(1/\cos 39° \cdot \tan 26{,}7°)$
$\alpha = 33°$.

Man sieht den Sonnenaufgang 33° nördlich gen Osten und den Sonnenuntergang 33° nördlich gen Westen.

Zeit und Ort des Sonnenaufgangs bzw. Sonnenuntergangs am **20. 07**.
Mittagszeit 12h 38min MEZ
Sonnenaufgang τ_A = 12h 38min – 7h 57min =   4h 41min MEZ
Sonnenuntergang τ_A = 12h 38min + 7h 57min = 20h 35min   MEZ
Der Ort des Sonnenaufgangs bzw. Sonnenuntergangs ist der gleiche wie im Mai.

Für $\delta = -11°$, $\delta = -20°$ kehren sich die Winkelwerte für Tag und Nacht um.
Der Bahnwinkel φ^* läuft natürlich weiter.
Die Zeiten des wahren Mittags im MEZ verändern sich durch die Werte der Zeitgleichung.
Wahrer Mittag MEZ ist ca. am
26. Feb.: 12h + 32min +14 min = 12h 46min,
25.Okt.: 12h + 32min - 15min = 12h 17min,   für $\delta = -11°$,

20. Jan.: 12h +32min +11min = 12h 43min
24. Nov.:12h + 32min – 14min = 12h 18min   für $\delta = -20°$

Allgemeine Darlegung

Basisvektoren des kartesischen Systems sind e_1, e_2, e_3 (geozentrisches Äquatorsystem).
e_1 liegt in der Äquatorebene und ist vom Standpunkt O der Mittagsvektor gen Norden, e_2 liegt in der Äquatorebene und ist gen Osten gerichtet, e_3 steht senkrecht zur Äquatorebene und ist wie die Erdachse zum Pol gerichtet. In diesem System hat der Normalenvektor der Horizontalebene die Darstellung $N_O = (-1, 0, \tan\varphi)$ alias $N_O = -1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + \tan\varphi \cdot e_3$.
Durch Drehung um die Achse durch O in Richtung von e_2 mit dem Winkel φ' hat man das kartesische System mit den Basisvektoren e_1', e_2', e_3' (geozentrisches Horizontalsystem).

Es ist $e_1' = \cos\varphi' \cdot e_1 + \sin\varphi' \cdot e_3$, damit ist $e_1 = \cos\varphi' \cdot e_1' - \sin\varphi' \cdot e_3'$,

$e_2' = e_2$, $e_2 = e_2'$

$e_3' = -\sin\varphi' \cdot e_1 + \cos\varphi' \cdot e_3$, $e_3 = \sin\varphi' \cdot e_1' + \cos\varphi' \cdot e_3'$.

In Bezug auf die Basis e_1', e_2', e_3' hat man die Kordinaten x_1', x_2', x_3' und damit generell für jeden Punkt
$x_1'e_1' + x_2'e_2' + x_3'e_3' = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$.
Der Endpunkt des um die Polachse e_3 rotierenden Sonnenvektors OS hat im Äquatorsystem die Koordinaten
$x_1 = \cos\sigma$, $x_2 = \sin\sigma$, $x_3 = \tan\delta$,
σ ist die Gradangabe für Stunden ab Mitternacht – $0° \leq \sigma \leq 360°$ –, und wächst monoton im Uhrzeigersinn, δ ist die Deklination der Sonne abhängig vom Tag – $-\varepsilon \leq \delta \leq +\varepsilon$, $\varepsilon = 23{,}44°$–.
Die Sonnenhöhe h im Äquatorsystem ist durchweg $h(\delta,\sigma) = \arctan(\tan\delta/(\sin^2\sigma + \cos^2\sigma)^{0,5})$, d.h. im Äquatorsystem ist δ konstant.
Im Horizontalsystem ist damit
$x_1' = \cos\varphi' \cdot \cos\sigma + \sin\varphi' \cdot \tan\delta$, $x_2' = \sin\sigma$, $x_3' = -\sin\varphi' \cdot \cos\sigma + \cos\varphi' \cdot \tan\delta$,

Sonnenhöhe am wahren Mittag und um Mitternacht
Im Horizontalsystem ist die Sonnenhöhe h' beim wahren Mittag

$$h'(\delta,\sigma) = \arctan(x_3'/(x_1'^2 + x_2'^2)^{0,5}))$$

Nach Einsetzen der Terme für x_i' und Anwendung der Additionstheoreme erhält man :

für $\sigma = 180°$ ist $h_1'(\delta,\sigma) = \arctan(\tan(\varphi'+\delta))$, Tageshöchststand über Horizont am wahren Mittag.

Für $\sigma = 0°$ ist, $h_2'(\delta,\sigma) = \arctan(-\tan(\varphi'-\delta))$, Tagestiefstand unter Horizont zur Mitternacht.

Sonnenhöhe und Winkel 6 Stunden vor und nach dem wahren Mittag

Für $\sigma = 90°$ bzw. $\sigma = 270°$ ist $h_3' = \arctan(\cos\varphi'\tan\delta/((\sin\varphi'\tan\delta)^2 + 1)^{0,5})$

Insbesondere ist $h_3' = 0$ für $\delta = 0$ (Tag = und Nachtgleiche) und $h_3' = 17{,}26°$ für $\delta = 23{,}44°$.

Die Koordinatenpaare $(\sin\varphi' \cdot \tan\delta, 1)$ und $(\sin\varphi' \cdot \tan\delta, -1)$ beschreiben die Fußpunkte der Höhen in der Horizontalebene. Von O aus bilden sie zum Vektor e_1' den Winkel
$\omega = \arctan(x_2'/x_1') = \pm \arctan(1/\sin\varphi'\tan\delta) = 15{,}26°$.
Am Tag der SSW hat um 6 Uhr die Sonne die Höhe 17,26° und der Fußpunkt des Lotes liegt 14,57° nördlich beim Blick gen Osten und um 18 Uhr WOZ hat die Sonne die gleiche Höhe und der Fußpunkt des Lotes liegt 14,57° nördlich beim Blick gen Westen.

Zeitwinkel und Horizontalwinkel zum Sonnenaufgang und Sonnenuntergang
Bei Sonnenauf- und Untergang ist in der Horizontalebene die Sonnenhöhe
$h = x_3' = -\sin\varphi' \cdot \cos\sigma + \cos\varphi' \cdot \tan\delta = 0$, also zu den Zeitwinkeln σ_A und σ_U mit
$\cos\sigma_A = \tan\delta/\tan\varphi'$, – $0° < \sigma_A < 180°$, bzw. $\cos\sigma_U = \tan\delta/\tan\varphi'$, – $180° < \sigma_U < 360°$.

Für die Winkel $\omega(\delta,\sigma)$ in der Horizontalebene hat man
$\tan\omega(\delta,\sigma) = x_2'/ x_1' = \sin\sigma /\cos\varphi'\cdot\cos\sigma + \sin\varphi'\cdot\tan\delta$.
Man rechnet besser mit $\sin\omega = x_2 /(x_1'^2+ x_2'^2)^{0,5})$, $\cos\omega = x_1 /(x_1'^2+ x_2'^2)^{0,5})$.

Für Köln hat man am Tag der Sommersonnenwende die Werte $\varphi = 51°$, $\varphi' = 39°$,
$\delta = \varepsilon = 23,44°$, $\sigma = 57,63°$. Es ist
$\omega_A = 50,80°$ und $\omega_U = -50,80°$, $\omega_A' = 39,20°$ und $\omega_U' = -39,20°$.

Die wahre Ortszeit WOZ in Minuten ist $\tau = \sigma\cdot 4\text{min/Grad}$.
Die mitteleuropäische Zeit MEZ stellt sich wie folgt dar:
MEZ = WOZ + $(15° - \lambda_{Ost})\cdot 4$min/Grad – ZG, λ_{Ost} ist der Längengrad des Ortes, ZG ist der von δ abhängige Zeitgleichungswert in Minuten, φ ist der Breitengrad des Ortes, $\varphi' = 90° - \varphi$, δ ist die Deklination abhängig vom Tag nach Tabelle (Internet).

Zeit und Winkel des Sonnenstandes in Würzburg am 27. April 2015.

Breitengrad $\varphi = 49,8°$, $\varphi' = 90° - \varphi = 40,2°$, $\delta = 14°$,
Längengrad 9,93° Ost entspricht 9,93°·4min/Grad = 39,72min vor Greenwich,
entspricht 60min – 39,72min = 20,28min nach MEZ (Mitteleuropäische Zeit).
Der wahre **Mittag** in Würzburg ist 20 Minuten nach 12 UHR MEZ.
MEZ = WOZ (wahre Ortszeit) in Würzburg + 20Minuten – ZG, ZG +2min am 27.4. nach Tabelle.
MEZ = $\sigma\cdot 4$min/Grad + 18,3min,
Wahrer Mittag in Würzburg:
MEZ = $\sigma_M\cdot 4$min/Grad + 18,3min mit $\sigma_M = 180°$
MEZ = 738,3min = **12h 18min**, Sonnenhöhe $\delta + \varphi' = 14° + 40,2° = 54,2°$.

WOZ des **Sonnenaufgangs** ist WOZ = $\sigma_A\cdot 4$min/Grad mit $\sigma_A = \arccos(\tan\delta/ \tan\varphi') = 72,82°$,
WOZ= 72,82° 4min/Grad = 291,4min = 4h51min,
MEZ = 4h 51min + 18,3min = 5h 9min, Sommerzeit **6h 9min.**

Richtung des Sonnenaufgangs
Für die Winkel ω in der Horizontalebene hat man
$\tan\omega = x'_2/x_1' = \sin\sigma/(\cos\varphi' \cos\sigma + \sin\varphi' \tan\delta)$
Durch Umformung anhand trigonometrischer Formeln ergibt sich speziell für den Sonnenaufgang (Sonnenuntergang)
$\tan\omega_{A,U} = \cos\varphi' \tan\sigma_A$
$\tan\omega_{A,U} = \cos 40,2° \tan 72,82°$
$\omega_{A,U} = 68°$ vom Nordpol gesehen.
Blickt man nach Osten, sieht man den Sonnenaufgang **22°** nördlich, blickt man nach Westen sieht man den Sonnenuntergang **22°** nördlich.

MEZ des **Sonnenuntergangs** 24h – 4h 51min +18min = 19h 27min, SZ = **20h27min.**

Lichte Tageslänge (12h – 4h-51min)·2 =**14h 18min**.

Stand der Sonne um 18h 18min Uhr MEZ (19h18min SZ)

$\omega = 270°+9,15°$, beim Blick nach Westen steht die Sonne 9,15° nördlich
h(18h18min) = 10,65° hoch.

Stand der Sonne um 6h 18 Uhr MEZ (7h 18min SZ)
$\omega = 90°- 9,15°$, beim Blick nach Osten steht die Sonne 9,15° nördlich
h(6h 18min) = 10,65° hoch.

Stand der Sonne um 9h 18min MEZ (10h 18min SZ)
$\omega = 90°+28°$, beim Blick nach Osten steht die Sonne 28° südlich h(9h18min) = 33° hoch.

Stand der Sonne um 15h 18min MEZ (16h 18min SZ)
$\omega = 270°-28°$, beim Blick nach Westen steht die Sonne 28° südlich h(15h 18min) = 33° hoch.

Die allgemeine Formel für die Sonnenhöhe ist $h_3' = \arctan(\cos\varphi'\tan\delta/((\sin\varphi'\tan\delta)^2 + 1)^{0,5})$ und die allgemeine Formel für den Winkel ist $\tan\omega(\delta,\sigma) = \sin\sigma/(\cos\varphi'\cdot\cos\sigma + \sin\varphi'\cdot\tan\delta)$. Deklination δ (Datum) und Zeitgleichungswert ZG (Datum) entnimmt man entsprechenden Tabellen aus dem Internet.