Symmetrische Operatoren F.O. 13.April 2008

Wir betrachten im n-dimensionalen Vektorraum V über dem reellen Zahlkörper **R** mit dem Standard-Skalarprodukt $<x,y> : V\text{x}V \to \mathbf{R} : <x,y> = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$ für Vektoren $x = \sum_{i=!}^{n} x_i \cdot e_i$ und $y = \sum_{i=!}^{n} y_i \cdot e_i$ bezüglich orthonormierter Basis $\{e_1,...,e_n\}$ einen linearen Operatoren $\mathbf{A}: V \to V : x \mapsto \mathbf{A}x$ mit der Eigenschaft $<\mathbf{A}x,y>=<x,\mathbf{A}y>$, also mit symmetrischer Darstellungsmatrix $A = (a_{i,k})$, $a_{i,jk}= a_{k\ ,i}$ für $i,k\in\{1,...,n\}$ bzgl. der vorgelegten Orthonormalbasis $\{e_1,...,e_n\}$.

Satz: Es gibt in V für den Operator **A** eine Orthonormalbasis $\{f_1,...,f_n\}$ bezüglich der die Darstellungsmatrix $B = (b_{i,k})$ des Operators **A** Diagonalform hat, also $a_{i,k} = 0$ für $i\neq k$ ist.

Äquivalent dazu:

Es gibt eine orthogonale (reell unitäre) Transformationsmatrix $P=(p_{i,k})$ mit $P^{-1} = {}^tP$ alias ${}^tP\cdot P= \mathbf{I}_n$, ${}^tP$ die tranponierte Matrix von P, $\mathbf{I}_n$ die Einheitsmatrix in $\mathbf{R}^n$, für einen Basiswechsel von $\{e_1,...,e_n\}$ zu einer neuen Orthonormalbasis $\{f_1,...,f_n\}$ derart, dass die transformierte Darstellungsmatrix $B = P^{-1}\cdot A\cdot P = {}^tP\cdot A\cdot P$ des Operators **A** Diagonalform hat.

Den Beweis führt man induktiv nach der Dimension des Vektorraums V.

Beim Induktionsschritt von n-1 auf n benutzen wir die wir den

Hilfssatz: Für den Operator $\mathbf{A}: V \to V : x \mapsto \mathbf{A}x$ mit der Eigenschaft $<\mathbf{A}x,y>=<x,\mathbf{A}y>$ gibt es einen Vektor $v\in V$, $v\neq$Nullvektor, oBdA. $|v|=1$, mit $Av = \lambda\cdot v$, $\lambda\in\mathbf{R}$, also einen Eigenvektor v der Länge 1 zum Eigenwert λ.

Beweis des Hilfssatzes.

Auf der Sphäre $S_n = \{x\in V; |x|=1\}$ der Einheitskugel von $V = \mathbf{R}^n$ betrachtet man die Funktion $q:S_n\to\mathbf{R}: x \mapsto <\mathbf{A}x,x>$. Bezüglich der Basis $\{e_1,...,e_n\}$ ist der Funktionsterm von q die quadratische Form $q(x)= (x_1,...,x_n)A\ {}^t(x1,...,x_n)$, wobei hier ${}^t(x_1,...,x_n)$ ein Spaltenvektor.

Die Definitionsmenge S_n ist in der durch das Skalarprodukt bestimmten Metrik von V beschränkt und abgeschlossen, also kompakt, zudem ist die Funktion q vermöge des Funktionsterms offenbar stetig.

Nach dem Maximumsatz für stetige Funktionen auf einem Kompaktum gibt es also einen Vektor $v\in S_n$ mit $q(v) = <\mathbf{A}v,v> \geq q(x)=<\mathbf{A}x,x>$ für alle $x\in S_n$. (*)

Mit Hilfe von Einheitsvektoren aus dem orthogonalen Komplement $W=\{w\in V; <w,v>=0\}$ zum Vektor v bilden wir differenzierbare Wege $z(t)= \cos(t)\cdot v +\sin(t)\cdot w$ etwa für $-\pi/4< t <\pi/4$ mit $|w|=1$ und $w\perp v$, die alle in der Sphäre S_n liegen, denn $<z(t),z(t)>=<\cos^2(t)\cdot<v,v> +\sin^2(t)\cdot<w,w> =\cos^2(t)+\sin^2(t)=1$.

Wegen $z(0)=v$ und (*) hat auf jedem dieser Wege die Funktion $q(z(t))$ an der Stelle $t=0$ ihr Maximum.

Dort ist notwendig $q'(z(t)) = <(\mathbf{A}z(0))',z(0))> + <(\mathbf{A}z(0)),z'(0)) = 0$, wobei $z'(0)=-\sin(0)\cdot v +\cos(0)\cdot w = w$.

Da **A** linear , ist $(\mathbf{A}z(0))'= \mathbf{A}z'(0)$. Da **A** symmetrisch, ist $(\mathbf{A}z'(0), z(0))= (z'(0), \mathbf{A}z(0))=(\mathbf{A}z(0), z'(0))$.

Also ist $q'(z(t)) = 2\cdot<(\mathbf{A}z(0),z'(0)) = 0$ und damit $\mathbf{A}z(0)\perp z'(0)$, alias $\mathbf{A}v\perp w$.

Dies gilt für jeden Weg z(t), also für jedes $w\in W$. Damit ist $\mathbf{A}v$ aus dem orthogonalen Komplement von W, also ein Vielfaches von v . q.e.d.

Beweis des Satzes: Für n=1 ist die Aussage trivial.

Induktion von n-1 auf n: Nach dem Hilfssatz gibt es einen Einheitsvektor $f_1=v$ mit $\mathbf{A}f_1\in V_1 = \{y_1\cdot f_1,\ y_1\in\mathbf{R}\}$

Es ist $V= V_1 \oplus W$ die direkte Summe von $V_1= \{y_1\cdot f_1,\ y_1\in\mathbf{R}\}$ und seinem orthogonale Komplement W .

Für $w\in W$ ergibt sich aus $<\mathbf{A}w,f_1>= <w,\mathbf{A}f_1> =<w,\lambda_1\cdot f_1> = 0$, dass $\mathbf{A}w\in W$. Zudem ist $\dim W= n-1$.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es für die Einschränkung des Operators **A** auf W eine orthonormierte Basis $\{f_2,...,f_n\}$ von Eigenvektoren . Zudem ist die Einschränkung von **A** auf V_1 die Vervielfachung mit dem Eigenwert λ_1. Damit ist $\{f_1,f_2,...,f_n\}$ eine orthonormierte Basis von V aus Eigenvektoren des Operators **A** . q.e.d.

Bemerkung über reell unitäre (orthogonale) Matrizen

Eine Matrix P wird *reell unitär* genannt genau dann, wenn $<Px,Py> = <x,y>$ für alle $x,y \in V$.

Weil generell $<Px,y>=<x,{}^tPy>$ für alle $x,y\in V$, ist $<Px,Py> = <x,y>$ äquivalent zu $<x,{}^tP\cdot Py> =<x,y>$ und damit zu ${}^tP\cdot P= \mathbf{I}_n$. In der Literatur werden solche Matrizen *orthogonal* genannt.

Die Transformation von Orthonormalbasen in V wird durch reelle unitäre (orthogonale) Matrizen P bewirkt. Das folgt aus $<Px,Px> = <x,x>$ für alle $x\in V$, der Invarianz der Länge unter solchen Abbildungen. Umgekehrt ergibt sich aus $<P(x+y),P(x+y)> +<P(x-y),P(x-y)> = 2\cdot<Px,Py>$, dass aus der Invarianz von Längen, also $<P(x+y),P(x+y)> =<x+y,x+y>$ und $<P(x-y),P(x-y)> = <x-y,x-y>$ die Eigenschaft $<Px,Py> =<x,y>$, also die reell unitäre Eigenschaft von P sich ergibt.