NETZWIDERSTAND IM QUASI-QUADRATISCHEN GITTER

von Hendrik Herrmann am 26.12.2011. Überarbeitung vom 27.11.2011.

Für meinen Großvater Fritz Ostermann. Vielen Dank Großvater.

Danke an meinen Bruder Gerrit Herrmann für die Prüfung einiger Aussagen sowie an meinen Vater Friedrich Herrmann für das Korrekturlesen.

Zusammenfassung. Dieser Artikel basiert auf dem Manuskript „Ebene Gitter mit zentralem Knotenpaar“ ([1]) und behandelt die Berechnung der Gesamtwiderstände endlicher sowie unendlicher ebener Gitter. Nach [1] erhält man im endlichen Fall den Gesamtwiderstand durch Lösen eines linearen Gleichungssystems LGS*. Im ersten Teil beschäftigen wir uns ausschließlich mit dem Gesamtwiderstand eines endlichen Gitters. Es wird gezeigt, dass der Gesamtwiderstand durch das Lösen eines erheblich kleineren linearen Gleichungssystems LGS** berechnet werden kann. Im zweiten Teil wird dann mit Hilfe der Ergebnisse des ersten Teils das Widerstand-Problem im unendlichen Gitter formuliert und gelöst.

Inhaltsverzeichnis

Teil 1. Reduktion von LGS* zu LGS**

1. Rekursive Berechnung der Potentiale

Grundlage sei zunächst ein endliches $m \times n$-Gitter von 1Ω - Widerständen mit $m = 2\mu - 1$ und $n = 2\nu$ $(\mu, \nu \geq 2)$. Man möchte den Gesamtwiderstand zwischen dem zentralen Knotenpaar bestimmen. Das $(m \cdot n + 1) \times (m \cdot n + 1)$ Gleichungssystem LGS sei bekannt, sowie die Reduktion auf das $(\mu \cdot v + 1) \times (\mu \cdot \nu + 1)$ Gleichungssystem LGS* durch die vorhandenen Symmetrien (siehe [1], [2]). Hierbei soll das Potential am zentralen Knoten nicht festgelegt sein[1]. Den 4. Quadranten des $m \times n$-Gitter nennen wir reduziertes Gitter, da es dem reduzierten Gleichungssystem LGS* entspricht.

Man betrachte nun die $\mu \times \mu$-Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 0 & -2 & & & & \\ -1 & 0 & -1 & & \mathbf{0} & \\ & -1 & 0 & -1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & -1 & 0 & -1 \\ & & & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Kennt man nun die Potentiale der i-ten und $(i-1)$-ten Spalte $(i \geq 2)$ des reduzierten Gitters, so können die Potentiale der $(i+1)$-ten Spalte wie folgt berechnet werden:

Sei $v_i \in \mathbb{R}^\mu$, $v_i = (x_1, \dots, x_\mu)^T$ ein Vektor, welcher die Potentiale der i-ten Spalte beschreibt, wobei x_1 dem Potential auf der horizontalen Symmetrieachse des $m \times n$-Gitters entspricht. Analog definiere man v_{i-1}. Dann gilt für die Potentiale der $(i+1)$-ten Spalte

$$v_{i+1} = (B + 4\mathrm{id})v_i - v_{i-1}. \tag{1.1}$$

Sind also v_1 (Potentiale direkt neben der vertikalen Symmetrieachse) und v_2 bekannt, so werden alle anderen Potentiale durch diese Rekursion generiert[2].

Ist der Gesamtstrom I bekannt, so kann man mit Hilfe der Symmetrien v_2 aus v_1 berechnen. Man erhält

$$v_2 = (B + 5\mathrm{id})v_1 - Ie_1, \tag{1.2}$$

wobei $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ den ersten kanonischen Basisvektor im $\mathbb{R}^\mu$ bezeichnet. Nun erkennt man durch Betrachtung des Gleichungssystems LGS*, dass v_ν und $v_{\nu-1}$ einer bestimmten Bedingung unterliegen:

$$(B + 3\mathrm{id})v_\nu - v_{\nu-1} = 0. \tag{1.3}$$

[1] Im späteren Verlauf werden wir den Gesamtstrom vorgeben und dann Potential-Verteilungen suchen, so dass dieser Strom fließt.

[2] Die Idee, einen rekursiven Ansatz zu wählen, wurde von Arnold Schönhage [3] inspiriert.

Wir setzen $u := v_1$. Um LGS* zu lösen reicht es also u und $I \neq 0$ so zu bestimmen, dass (1.3) erfüllt ist oder im Matritzen Kalkül formuliert

$$(-\mathrm{id}, B+3\mathrm{id}) \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \\ -\mathrm{id} & (B+4\mathrm{id}) \end{pmatrix}^{\nu-2} \left(\begin{pmatrix} \mathrm{id} \\ B+5\mathrm{id} \end{pmatrix} u - I \begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \end{pmatrix} \right) = 0 \tag{1.4}$$

gilt. Man siehe [2] für mehr Informationen zur Rekursion.

2. Erläuterung des Matritzen Kalküls

Die Matrix $M_E := (-\mathrm{id}, B+3\mathrm{id})$ ist eine $\mu \times 2\mu$-Matrix und $M_E \begin{pmatrix} v_{\nu-1} \\ v_\nu \end{pmatrix} = 0$ entspricht genau (1.3).

Die Matrix $H_R := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \\ -\mathrm{id} & (B+4\mathrm{id}) \end{pmatrix}$ ist eine $2\mu \times 2\mu$-Matrix und $H_R \begin{pmatrix} v_{i-1} \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_i \\ v_{i+1} \end{pmatrix}$ entspricht der Rekursion (1.1).

Die Matrix $M_A := \begin{pmatrix} \mathrm{id} \\ B+5\mathrm{id} \end{pmatrix}$ ist eine $2\mu \times \mu$-Matrix mit $M_A u - I \begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ entspricht (1.2).

3. Widerstand im endlichen ebenen Gitter

Nun setzen wir, wie zu Beginn angekündigt, $I = 1$ und fragen uns, wie die Potentiale gewählt werden müssen, damit dieser Strom fließt. Die Antwort findet man durch Lösen des folgenden $\mu \times \mu$ Gleichungssystems, welches mit LGS** bezeichnet wird:

$$M_E (H_R)^{\nu-2} M_A u = M_E (H_R)^{\nu-2} \begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Aus einer Lösung $u = (x_1, \dots, x_\mu)$ dieses Gleichungssystem ergibt sich der Betrag des Gesamtwiderstands des $m \times n$-Gitters

$$R = \frac{U}{I} = \frac{2x_1}{1} = 2x_1,$$

wobei U die Spannung zwischen dem zentralen Knotenpaar bezeichnet. Also wurde das Widerstandsproblem vom Lösen eines $(\mu \cdot \nu + 1) \times (\mu \cdot \nu + 1)$ Gleichungssystems LGS* auf das Lösen eines $\mu \times \mu$ Gleichungssystems LGS** reduziert.

Bemerkung 1. Um nun aus der Lösung u von LGS** eine Lösung von LGS* zu erzeugen (d.h. um alle Potentiale im reduzierten Gitter zu berechnen), müssen noch alle v_i ,$2 \leq i \leq \nu$, aus Abschnitt 1 berechnet werden. Dies kann die Rechenzeit erheblich vergrößern. Zum Beispiel hat das Berechnen des Widerstands in einem 101×100-Gitter durch Lösen von LGS** mit dem Gauss-Verfahren auf einem AMD Phenom 8650 X3 (2,3 GHz) 17 Min gedauert. Die Berechnung aller Potentiale benötigte weitere 22 Min. Also insgesamt 39 Min für die Berechnung aller Potentiale des reduzierten Gitters.

Teil 2. Übergang zum unendlichen Gitter

Im Falle eines unendlichen Gitters liefert uns LGS* unendlich viele Gleichungen. Es sei $\{x_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Familie von Potentialen welche diesen Gleichungen genügt. Dann verlangen wir mindestens

$$\sup(|x_{ij}|) < \infty.$$

Notation. Es sei ℓ der Raum aller reellen Folgen. Weiter sei $\ell^\infty := \{(x_l)_{l\in\mathbb{N}} \in \ell \mid \sup_{l\in\mathbb{N}}|x_l| < \infty\}$.

Bemerkung. Der Vektorraum ℓ^∞ wird durch die Norm $\|(x_l)_{l\in\mathbb{N}}\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}}|x_l|$ zu einem Banachraum.

Wir werden in Abschnitt 9 eine Lösung in ℓ^∞ durch eine Folge von Elementen aus ℓ^∞ approximieren. Das Problem ist, dass diese Folge bzgl. der ℓ^∞-Norm nicht konvergiert. Wir benötigen also einen schwächeren Konvergenzbegriff auf ℓ^∞, der nun konstruiert werden soll.

Es sei S die Menge aller echt positiven, monoton fallenden, durch Eins beschränkten, reellen Nullfolgen. Für $s = (s_l)_{l\in\mathbb{N}} \in S$ setzen wir

$$L(s) := \{(x_l)_{l\in\mathbb{N}} \in \ell \mid \|(x_l)_{l\in\mathbb{N}}\|_{L(s)} := \sup_{l\in\mathbb{N}}|x_l s_l| < \infty\}.$$

Dann ist $(L(s), \|\cdot\|_{L(s)})$ ein Banachraum welcher ℓ^∞ enthält. Es gilt sogar

$$\bigcap_{s\in S} L(s) = \ell^\infty.$$

Definition 2. Eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in ℓ^∞ konvergiert gewichtet gegen $u \in \ell^\infty$, wenn

$$\lim_{n\to\infty}\|u - u_n\|_{L(s)} = 0$$

für jedes $s \in S$ gilt.

Auch unter diesem Konvergenzbegriff ist ℓ^∞ immer noch vollständig. Außerdem definiert dieser Begriff eine neue Topologie auf ℓ^∞. Für einen Unterraum $W \subset \ell^\infty$ soll $\overline{W}^S$ den topologischen Abschluss bzgl. dieser neuen Topologie bezeichnen. Es gilt

$$\bigcap_{s\in S}\overline{W}^{\|\cdot\|_{L(s)}} = \overline{W}^S.$$

Das folgende Beispiel soll den Unterschid der Topologien verdeutlichen.

Beispiel 3. Man betrachte

$$W := \operatorname{span}\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^\infty,$$

wobei $e_n := (0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$ an der n-ten Stelle eine Eins hat. Es gilt

$$\overline{W}^S \neq \overline{W}^{\|\cdot\|_\infty},$$

denn der Vektor $(1, 1, 1, \ldots) \in \ell^\infty$ liegt zwar in $\overline{W}^S$ aber nicht in $\overline{W}^{\|\cdot\|_\infty}$.

Im Folgenden soll $s \in S$ fest gewählt sein. Wir schreiben dann $L := L(s)$.

4. Erster Grenzübergang

Es sei $\nu \geq 2$ fest gewählt. Ausgehend von Gleichung (1.4) schreiben wir $\mu \to \infty$. Dann wird B zu einem Operator, den wir ebenfalls mit B bezeichnen: $B : L \to L$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & & \\ -1 & 0 & -1 & \\ & -1 & 0 & -1 \\ & & & \ddots \\ & & & \end{pmatrix}.$$

Außerdem werden M_A, H_R und M_E zu beschränkten[3] Operatoren

$M_A : L \to L \times L$,

$H_R : L \times L \to L \times L$,

$M_E : L \times L \to L$.

Um (1.4) zu lösen, setzen wir wie in Abschnitt 3 $I = 1$ und suchen $u \in L$, sodass

$$M_E (H_R)^{\nu-2} \left(M_A u - \begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \end{pmatrix} \right) = 0 \tag{4.1}$$

gilt.

5. Zweiter Grenzübergang

Um das unendliche Problem: “(4.1)für $\nu \to \infty$” zu lösen, ist es naheliegend, nach Eigenwerten α von H_R mit $|\alpha| < 1$ zu suchen[4] .

Dann nennen wir $u \in L$ eine Lösung des unendlichen Problems, wenn $M_A u - \begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \end{pmatrix}$ in der direkten Summe der den α zugehörigen Eigenräume (mit $\alpha > 0$) liegt. Denn dann gilt

$$\lim_{\nu \to \infty} (H_R)^{\nu-2} \left(M_A u - \begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \end{pmatrix} \right) = 0. \tag{5.1}$$

Später soll der Begriff einer Lösung noch verallgemeinert werden, da die bloße algebraische direkte Summe nicht ausreichen wird. Der analytische Abschluss der direkten Summe bezüglich der L-Norm wäre denkbar.

6. Spektralanalyse des Operators H_R

Es sei $(v, w)^T \in L \times L$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\alpha \neq 0$ (Offenbar ist H_R invertierbar). Dann gilt

$$\begin{pmatrix} \alpha v \\ \alpha w \end{pmatrix} = H_R \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ -v + Bw + 4w \end{pmatrix}.$$

[3]Man wähle z.B. $\|(v, w)^T\|_{L\times L} := \max\{\|v\|_L, \|w\|_L\}$ als Norm auf $L \times L$.

[4]Die Annahme, es gäbe $y \in L \times L$ mit $H_R^k y \in \ker M_E$ für alle $k \geq 1$, führt nämlich zu einem Widerspruch.

Also sind alle Eigenvektoren von H_R zu einem Eigenwert α von der Form $(v, \alpha v)^T$, wobei $v \in L$ Eigenvektor von B zum Eigenwert $\left(\alpha - 4 + \frac{1}{\alpha}\right)$ ist, d.h. es gilt

$$Bv = \left(\alpha - 4 + \frac{1}{\alpha}\right) v.$$

Ist andererseits $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda > -2$ oder $\lambda < -6$ ein Eigenwert von B mit zugehörigem Eigenvektor $v \in L$, so ist $(v, \alpha v)^T \in L \times L$ ein Eigenvektor von H_R zum Eigenwert α,

$$\alpha := \frac{1}{2}\left(\lambda + 4 \pm \sqrt{(\lambda+4)^2 - 4}\right).$$

Genauer gesagt gilt $|\alpha| < 1$ genau dann, wenn $\lambda > -2$ und $\alpha = \frac{1}{2}\left(\lambda + 4 - \sqrt{(\lambda+4)^2 - 4}\right)$ oder $\lambda < -6$ und $\alpha = \frac{1}{2}\left(\lambda + 4 + \sqrt{(\lambda+4)^2 - 4}\right)$ gilt.

Das Problem, Eigenwerte des Operators H_R betraglich kleiner 1 zu finden, wurde also in das Problem, Eigenwerte λ des Operators B zu finden, welche $\lambda > -2$ oder $\lambda < -6$ genügen, überführt.

Bevor wir nun die Eigenvektoren von B angeben, beweisen wir ein Theorem, welches im späteren Verlauf von großer Bedeutung seien wird.

Theorem 4. *Es seien $\{w_1, \dots, w_n\}$Eigenvektoren von B zu den Eigenwerten $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$und den daraus berechneten Eigenwerten $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$von H_R mit Eigenvektoren $\{(w_1, \alpha_1 w_1)^T, \dots, (w_n, \alpha_n w_n)^T\}$ Es sei $u := \sum_{i=1}^{n} w_i$ und $v := -e_1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i + 1}{\alpha_i} w_i$. Dann gilt*

$$M_A u - \begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} w_i \\ \alpha_i w_i \end{pmatrix}.$$

Beweis. Es gilt

$$(B + 5id)\, w_i = \left(\alpha_i + 1 + \frac{1}{\alpha_i}\right) w_i = \alpha_i w_i + \frac{\alpha_i + 1}{\alpha_i} w_i.$$

Damit folgt dann

$$(B + 5id)\, u - e_1 = v + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i.$$

□

Bemerkung. Wenn in der Situation von Theorem 4 $v = 0$ gilt, so ist u eine Lösung des unendlichen Problems.

7. Einige Eigenvektoren des Operators B

Für jedes $x \in (0, \pi)$ ist $w(x) := (\cos((l-1)x))_{l \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ ein Eigenvektor von B zum Eigenwert $\lambda(x) := -2\cos(x)$. Es sei

$$\alpha(x) := \frac{1}{2}\left(\lambda(x) + 4 - \sqrt{(\lambda(x)+4)^2 - 4}\right) = 2 - \cos(x) - \sqrt{(2 - \cos(x))^2 - 1}.$$

Dann ist $(w(x), \alpha(x)w(x))^T$ Eigenvektor von H_R zum Eigenwert $\alpha(x)$ und es gibt $\delta > 0$, so dass $\delta \leq \alpha(x) < 1$ für jedes $x \in (0, \pi)$ gilt. Nun setzen wir

$$W_B := \operatorname{span}\{w(x) \mid x \in (0, \pi)\} \subset \ell^\infty,$$

$$W_H := \operatorname{span}\{(w(x), \alpha(x)w(x))^T \mid x \in (0, \pi)\} \subset \ell^\infty \times \ell^\infty.$$

Offenbar sind die Mengen, die W_B bzw. W_H erzeugen, bereits algebraische Basen dieser Räume.

8. Approximation des unendlichen Problems

Wir möchten den Lösungsbegriff aus Abschnitt 5 so verstehen bzw. erweitern, dass $u \in \ell^\infty$ eine Lösung ist, wenn

$$M_A u - \begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \end{pmatrix} \in \overline{W_H}^S$$

gilt[5]. Um eine solche Lösung zu bestimmen, bedarf es einiger Vorbereitungen, weshalb weiterhin $L = L(s)$ für ein festes $s = (s_l)_{l \in \mathbb{N}} \in S$ betrachtet werden soll.

Wir konstruieren nun eine Abbildungen, mit der die Aussage des Theorems 4 neu formuliert werden kann.

Es sei $f : W_B \to W_B$ eine lineare Abbildungen definiert durch $f(w(x)) = \frac{\alpha(x)+1}{\alpha(x)} w(x)$. Dann ist f ein Isomorphismus. Nun kann man Theorem 4 wie folgt formulieren:

Für $u \in W_B$ gilt

$$M_A u - \begin{pmatrix} 0 \\ f(u) \end{pmatrix} \in W_H.$$

Gilt außerdem $f(u) = e_1$, so ist u eine Lösung des unendlichen Problems. Wie in Abschnitt 5 bereits erwähnt, soll jetzt der Lösungsbegriff erweitert werden.

Definition 5. Ein Vektor $u \in L$ heißt approximative Lösung des unendlichen Problems (ApL) auf L, wenn es eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in W_B gibt mit $\lim_{n \to \infty} u_n = u$ und $\lim_{n \to \infty} f(u_n) = e_1$ bzgl. der $L-$Norm.

Bemerkung. Jede Lösung des unendlichen Problems ist auch approximative Lösung.

Lemma 6. *Ist $u \in L$ eine ApL, so gilt:*

(i) $u \in \overline{W_B}$,

(ii) $M_A u - \begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \end{pmatrix} \in \overline{W_H}$.

Beweis. (i) folgert man direkt aus den Eigenschaften des Abschlusses. (ii) folgt aus der Tatsache, dass M_A beschränkt ist und $\lim_{n \to \infty} f(u_n) = e_1$ bzgl. der $L-$Norm gilt. Denn deshalb

[5] Die durch gewichtete Konvergenz auf ℓ^∞ erzeugte Topologie induziert eine Produkt-Topologie auf $\ell^\infty \times \ell^\infty$. Dann bezeichnet $\overline{W_H}^S$ den Abschluss von $W_H \subset \ell^\infty \times \ell^\infty$ bezüglich dieser Topologie.

ist

$$\left(M_A u_n - \begin{pmatrix} 0 \\ f(u_n) \end{pmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset W_H$$

eine Folge, die bzgl. der $L \times L-$Norm gegen $M_A u - \begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \end{pmatrix}$ konvergiert. □

9. Bestimmung einer approximativen Lösung

Man setze

$$u_n := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha(\frac{2k+1}{2n}\pi)}{\alpha(\frac{2k+1}{2n}\pi)+1} w(\frac{2k+1}{2n}\pi).$$

Dann gilt $u_n \in W_B$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $W_B \subset \ell^\infty$. Weiter sei $u = (J_l)_{l\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ mit

$$J_l := \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)+1}\cos((l-1)x)dx.$$

Lemma 7. *Es gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ *bzgl. der* $L-$*Norm.*

Beweis. Zunächst betrachte man $h : (0,\pi) \to \mathbb{R}$

$$h(x) := \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)+1} = \frac{1}{3-\cos(x)+\sqrt{(2-\cos(x))^2-1}}.$$

Da h stetig und beschränkt ist, gilt nach Definition des Riemann-Integrals

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\cos\left(\frac{2k+1}{2n}(l-1)\pi\right) = \pi J_l$$

für jedes $l \in \mathbb{N}$.

Es sei nun $\varepsilon > 0$. Man betrachte die Differenz

$$d(l,n) := \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\cos\left(\frac{2k+1}{2n}(l-1)\pi\right) - J_l\right|.$$

Wegen $L = L(s)$ gilt $\|u_n - u\|_L = \sup\limits_{l\in\mathbb{N}}(d(l,n)s_l)$ und außerdem ist d beschränkt durch $C := 2\pi \sup\limits_{x\in(0,\pi)} |h(x)|$. Dann wähle man $l' \in \mathbb{N}$ mit $C \cdot s_{l'} < \varepsilon$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(l,n) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und alle $l \leq l'$ gilt. Also gilt $\|u_n - u\|_L < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. □

Es soll nun gezeigt werden, dass u durch $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu einer ApL auf L wird.

Lemma 8. *Es gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = e_1$ *bzgl. der* $L-$*Norm.*

Beweis. Man schreibt

$$f(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right).$$

Außerdem gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k+1}{2n} l\pi\right) = \begin{cases} n & l \in 2n\mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Damit erhält man für den l-ten Eintrag von $f(u_n)$:

$$(f(u_n))_l = \begin{cases} 1 & (l-1) \in 2n\mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und somit

$$\|f(u_n) - e_1\|_L = s_{2n+1}.$$

Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \|f(u_n) - e_1\|_L = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0.$ □

Es wurde also gezeigt, dass u eine ApL des unendlichen Problems auf L ist. Wie oben bereits erwähnt, ist dann für jedes $s \in S$ der Vektor $u \in \ell^\infty$ eine ApL auf $L(s)$. Mit Hilfe von Lemma 6 erhält man $u \in \bigcap\limits_{s\in S} \overline{W_B}^{\|\cdot\|_{L(s)}}$ und $\left(M_A u - \begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \end{pmatrix}\right) \in \bigcap\limits_{s\in S} \overline{W_H}^{\|\cdot\|_{L(s)}}$. D.h. es gilt

$$u \in \overline{W_B}^S \text{ mit } \left(M_A u - \begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \end{pmatrix}\right) \in \overline{W_H}^S.$$

10. Berechnung des Widerstands im unendlichen Gitter

Wie in Abschnitt 3 ist der Betrag des Gesamtwiderstand gegeben durch

$$R = \frac{U}{I} = \frac{2J_1}{1} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)+1} dx.$$

Nach dem Beweis von Lemma 7 gilt dann $R = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi h(x)dx$ also

$$R = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{3 - \cos(x) + \sqrt{(2-\cos(x))^2 - 1}} dx.$$

Das nächste Lemma zeigt, dass $\int_0^\pi h(x)dx = \frac{\pi}{4}$ gilt. Damit ergibt sich dann

$$R = \frac{1}{2}$$

und somit beträgt der Gesamtwiderstand im unendlichen ebenen Gitter 0.5Ω.

Lemma 9. *Es gilt*

$$\int_0^\pi \frac{1}{3 - \cos(x) + \sqrt{(2-\cos(x))^2 - 1}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Beweis. Erweitert man den Integranden mit $3-\cos(x)-\sqrt{(2-\cos(x))^2-1}$, so gibt das

$$\frac{1}{3-\cos(x)+\sqrt{(2-\cos(x))^2-1}} = \frac{3-\cos(x)}{2(3-\cos(x))} - \frac{\sqrt{(2-\cos(x))^2-1}}{2(3-\cos(x))}$$

$$=: r_1(x) - \frac{1}{2} r_2(x). \tag{10.1}$$

Es gilt $r_1(x) = \frac{1}{2}$ und

$$\int_0^\pi r_1(x)dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Um das Integral von r_2 zu bestimmen, schreibt man unter Verwendung von $3-\cos(x) = 2-\cos(x)+1$ und der dritten binomischen Formel

$$\frac{\sqrt{(2-\cos(x))^2-1}}{3-\cos(x)} = \frac{\sqrt{(2-\cos(x)-1)(2-\cos(x)+1)}}{2-\cos(x)+1} = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{3-\cos(x)}}.$$

Man erweitert den Radikant der rechten Seite der Gleichung mit $1+\cos(x)$ und erhält

$$r_2(x) = \sqrt{\frac{\sin^2(x)}{(3-\cos(x))(1+\cos(x))}} = \frac{\sin(x)}{\sqrt{4-(1-\cos(x))^2}}.$$

Nun substituieren wir $y = \frac{1}{2}(1-\cos(x))$ mit $dy = \frac{1}{2}\sin(x)dx$, $y(0) = 0$ und $y(\pi) = 1$. Damit gilt

$$\int_0^\pi r_2(x)dx = \int_0^1 \frac{2dy}{\sqrt{4-4y^2}} = [\arcsin(u)]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Aus (10.1) folgt dann

$$\int_0^\pi \frac{1}{3-\cos(x)+\sqrt{(2-\cos(x))^2-1}}dx$$
$$= \int_0^\pi r_1(x)dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi r_2(x)dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

□

Literatur

[1] „Ebene Gitter mit zentralem Knotenpaar", Hendrik Herrmann/Fritz Ostermann, ein Manuskript, Nov 2011, für Arnold Schönhage zum 77. Geburtstag am 1.12.2011.

[2] „Potential-Rekursion im reduzierten Gitter", Fritz Ostermann, Dezember 2011.

[3] „Doppel- und Tripel-Leiter in unendlichen Gittern" , Arnold Schönhage, Anlage einer E-mail Dez 2008 an Gert Regenspurg.