Erforschung des Körpers der 15-ten Einheitswurzeln

Für Gerrit vom Opa im März 2006

Der Körper der 15. Einheitswurzeln ist ein Erweiterungskörper des Körpers Q der rationalen Zahlen. Ein Modell dieses *Kreisteilungskörpers* K_{15} wird erzeugt durch Hinzunahme eines Lösungselements ξ der in Q *irreduziblen* Gleichung $x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1 = 0$ und aller unter Einbezug rationaler Zahlen sich daraus durch Addition/Subtraktion und Multiplikation/Division ergebenden Elemente. Damit gilt $\xi^8 = \xi^7 - \xi^5 + \xi^4 - \xi^3 + \xi - 1$. Die Potenzen ξ^n mit $n \geq 8$ können somit als Summen aus Potenzen von ξ mit Exponenten $n \leq 7$ dargestellt werden. Wegen $\xi^{15} = 1$ und ξ^n #1 für $1 \leq n \leq 14$ gibt es nur 15 verschiedene Potenzwerte von ξ . Es sind die Nullstellen des Polynoms $x^{15} - 1 = (x-1)(x^2+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$ und damit alle 15-ten Einheitswurzeln. In der Ebene der komplexen Zahlen liegen sie auf dem Einheitskreis an den Ecken eines regelmäßigen Fünfzehnecks (Abb.1). Anhand der Winkelfunktionen sin und cos und der imaginären Einheit **i** mit $\mathbf{i}^2 = -1$ kann man sie durch $\xi^k = \cos(k*24°) + \sin(k*24°)\,\mathbf{i}$, k=1,2,3,...,15 , darstellen.

Die Nullstellen des in Q irreduziblen Faktors (x^2+x+1) sind die primitiven 3-ten Einheitswurzeln, also

$\xi^5 = \cos 120° + \sin 120°\,\mathbf{i} = -½ + ½\sqrt{3}\,\mathbf{i}$, $\xi^{10} = \cos 240° + \sin 240°\,\mathbf{i} = -½ - ½\sqrt{3}\,\mathbf{i}$

und die des in Q irreduziblen Faktors $(x^4+x^3+x^2+x+1)$ die primitiven 5-ten Einheitswurzel, also

$\xi^3 = \cos 72° + \sin 72°\,\mathbf{i} = 1/4\,(-1+\sqrt{5}) + 1/4\sqrt{(10+2\sqrt{5})}\,\mathbf{i} \approx 0{,}3090 + 0.9510\,\mathbf{i}$,

$\xi^6 = \cos 144° + \sin 144°\,\mathbf{i} = 1/4\,(-1-\sqrt{5}) + 1/4\sqrt{(10-2\sqrt{5})}\,\mathbf{i} \approx -0{,}8090 + 0.5878\,\mathbf{i}$,

$\xi^9 = \cos 216° + \sin 216°\,\mathbf{i} = 1/4\,(-1-\sqrt{5}) - 1/4\sqrt{(10-2\sqrt{5})}\,\mathbf{i} \approx -0{,}8090 - 0.5878\,\mathbf{i}$,

$\xi^{12} = \cos 288° + \sin 288°\,\mathbf{i} = 1/4\,(-1+\sqrt{5}) - 1/4\sqrt{(10+2\sqrt{5})}\,\mathbf{i} \approx 0{,}3090 - 0.9510\,\mathbf{i}$.

Anhand der Potenzen von ξ hat man also Darstellungen für alle primitiven dritten und fünften Einheitswurzeln, sowie auch für die Zahlen $\xi^5 - \xi^{10} = \mathbf{\sqrt{3}\,i}$ und $2\,(\xi^3 + \xi^{12} + 1) = \mathbf{\sqrt{5}}$.

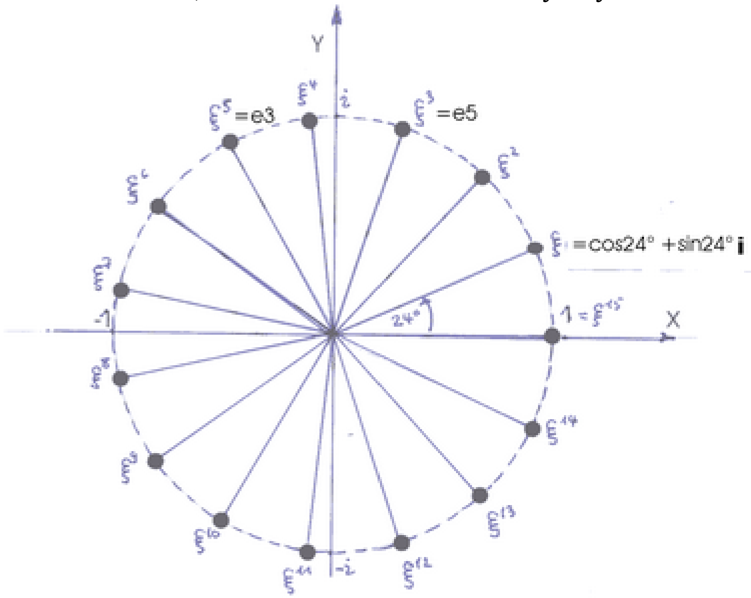

Abb1. Potenzen der 15.Einheitswurzel in der komplexen Ebene

Körperkonstruktion durch Adjunktion

Unser Modell des Zahlkörpers K_{15} wurde durch Hinzunahme der primitiven 15-ten Einheitswurzel $\boldsymbol{\xi}$ zum Grundkörper Q konstruiert , indem man alle Linearkombinationen

$a_7\xi^7 + a_6\xi^6 + a_5\xi^5 + a_4\xi^4 + a_3\xi^3 + a_2\xi^2 + a_1\xi + a_0$ aus den acht Basis-Elementen $\xi^7, \xi^6, \xi^5, \xi^4, \xi^3, \xi^2, \xi$, 1 bildet, wobei die Koeffizienten $a_7,a_6,a_5,a_4,a_3,a_2,a_1,a_0$ der Linearkombinationen beliebig aus Q entnommen wurden. Will man dies hervorheben, schreibt man $K_{15} = Q(\boldsymbol{\xi})$ und sagt, der Erweiterungskörper sei durch *Adjunktion* von ξ zu Q entstanden. Er ist der kleinste Zahlkörper, über dem Grundkörper, der das neu hinzugenommene Element enthält.

Schreibt man diese Linearkombinationen als „Achter" $(a_7,a_6,a_5,a_4,a_3,a_2,a_1,a_0)$, so ist (0,0,0,0,0,0,0,0) das Nullelement und (0,0,0,0,0,0,0,1) das Einselement des Grundkörpers Q und ξ = (0,0,0,0,0,0,1,0).

Potenzen von ξ^n als Achter					
N	Achter	n	Achter	N	Achter
0 oder 15	(0,0,0,0,0, 0,0,1)				
1	(0,0,0,0,0,0,1,0)	6	(0,1,0,0,0,0,0,0)	11	(0,-1,0,0,0,0,-1,0)
2	(0,0,0,0,0,1,0,0)	7	(1,0,0,0,0,0,0,0)	12	(-1,0,0,0,0,-1,0,0)
3	(0,0,0,0,1,0,0,0)	8	(1,0,-1,1,-1,0,1,-1)	13	(-1,0,1,-1,0,0,-1,1)
4	(0,0,0,1,0,0,0,0)	9	(1,-1,0,0,-1,1,0,-1)	14	(-1,1,0,-1,1,-1,0,1)
5	(0,0,1,0,0,0,0,0)	10	(0,0,-1,0,0,0,0,-1)	15	(0,0,0,0,0,0,0,1)

Konjugierte Elemente
Neben $x_1 = \xi$ sind die Elemente $x_2 = \xi^2$, $x_3 = \xi^4$, $x_4 = \xi^7$, $x_5 = \xi^8$, $x_6 = \xi^{11}$, $x_7 = \xi^{13}$, $x_8 = \xi^{14}$ Lösungen der Gleichung $x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1 = 0$, genügen also der Formel $x^8 = x^7 - x^5 + x^4 - x^3 + x - 1$. Anhand der Tabelle lässt sich dies leicht kontrollieren. Die Elemente ξ, ξ^2, ξ^4, ξ^7 ξ^8, ξ^{11}, ξ^{13}, ξ^{14} sind als Lösungen der selben Gleichung einander *konjugiert* .
Unter den Zahlen 1,2,3,...,15 sind die Exponenten 2,4,7, 8,11,13,14 neben 1 die zu 15 teilerfremden Zahlen. Somit sind x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 die primitiven 15-ten Einheitswurzeln. Ihre Potenzen erzeugen alle 15-ten Einheitswurzeln. Analog zu $x_1 = \xi$ könnten Potenzen von x_2, also $x_2^0 = 1$, $x_2^1 = \xi^2$, $x_2^2 = \xi^4$, $x_2^3 = \xi^6$, $x_2^4 = \xi^8$, $x_2^5 = \xi^{10}$, $x_2^6 = \xi^{12}$, $x_2^7 = \xi^{14}$, oder die von x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, bzw. x_8 als Basis zur Darstellung von Achter $(a_7,a_6,a_5,a_4,a_3,a_2,a_1,a_0)$ dienen. Die Formel zur Reduktion der Exponenten $n \geq 8$ bleibt dabei erhalten.

Automorphismen von K_{15}
Die Ersetzung von $x_1 = \xi$ durch $x_2 = \xi^2$ bewirkt eine Abbildung unter den Achtern, die mit der Addition als auch mit der Multiplikation in K_{15} verträglich ist: Das Bild einer Summe ist gleich der Summe der Bilder und das Bild eines Produkts gleich dem Produkt der Bilder ist. Die Achter $(0,0,0,000,00,0,0,a_0)$, die für Zahlen aus Q stehen, werden dabei identisch auf sich abgebildet. Das Ersetzen von $x_1 = \xi$ durch $x_2 = \xi^2$ ist damit ein *Automorphismus* von K_{15} . Wir schreiben ihn hier σ_2 . Das Ersetzen von $x_1 = \xi$ durch $x_3 = \xi^4$ also auch das von $x_1 = \xi$ durch $x_4 = \xi^7$ oder $\xi 8$, ξ^{11},ξ^{13},ξ^{14} sind entsprechend Automorphismen von K_{15} , die wir σ_4 , σ_7 ,σ_8 ,σ_{11} ,σ_{13} bzw. σ_{14} schreiben. Jeder dieser Automorphismen ist durch die Permutation unter den acht konjugierten Wurzeln ξ, ξ^2, ξ^4, ξ^7 , ξ^8, ξ^{11}, ξ^{13} , ξ^{14} die er bewirkt, charakterisiert.
Zweimalige Anwendung von σ_4 auf ξ, kann als Potenzieren von ξ mit 16 betrachten werden , denn $\sigma_4(\sigma_4(\xi)) = \sigma_4(\xi^4) = (\xi^4)^4 = \xi^{16}$, und das ist hier wegen $\xi^{16} = \xi$ gleichbedeutend mit der identischen Abbildung. Wir schreiben dies $\sigma_4^2 = id$. Entsprechendes gilt für die zweimalige Anwendung von σ_{11} oder σ_{14} . Die Hintereinanderausführung von σ_7 nach σ_4 ergibt bei analoger Betrachtung ein Potenzieren mit 28 . Wegen $\xi^{28} = \xi^{13}$ führt dies zu $\sigma_7 \sigma_4 = \sigma_{13}$.
Neben den betrachteten Automorphismen und der identischen Abbildung $\sigma_1 = id$, erlaubt K_{16} keine anderen mit der Addition und Multiplikation verträglichen Abbildungen auf sich.

Gruppen von Automorphismen
Die acht Automorphismen id , σ_2 , σ_4 , σ_7 σ_8 , σ_{11} , σ_{13} , σ_{14} bilden bezüglich der Hintereinanderausführung die *Galois'sche Gruppe* **G** des Körpers K_{15} über dem Grundkörper Q . Sie ist kommutativ, jedoch nicht zyklisch. Die Hintereinanderausführung von Automophismen erfolgt gemäß folgender Tabelle:

id	σ_2	σ_4	σ_8	σ_7	σ_{11}	σ_{13}	σ_{14}
σ_2	σ_4	σ_8	id	σ_{14}	σ_7	σ_{11}	σ_{13}
σ_4	σ_8	id	σ_2	σ_{13}	σ_{14}	σ_7	σ_{11}
σ_8	Id	σ_2	σ_8	σ_{11}	σ_{13}	σ_{14}	σ_7
σ_7	σ_{14}	σ_{13}	σ_{11}	σ_4	σ_2	id	σ_8
σ_{11}	σ_7	σ_{14}	σ_{13}	σ_2	id	σ_8	σ_4
σ_{13}	σ_{11}	σ_7	σ_{14}	id	σ_8	σ_4	σ_2
σ_{14}	σ_{13}	σ_{11}	σ_7	σ_8	σ_4	σ_2	id

Die Elemente σ_4, σ_{11} , σ_{14} haben die Ordnung 2 , d.h. zweimalige Ausführung ergibt die Identität id , die Elemente σ_2 , σ_7 , σ_8 , σ_{13} haben die Ordnung 4 , d.h. viermalige Ausführung ergibt die Identität id . Außer der Gruppe **G** und der trivialen Untergruppe $\mathbf{G}_{id}$ ={id} gibt es drei Untergruppen mit 2 Elementen:
$\mathbf{G_4}$ ={id, σ_4}, $\mathbf{G_{11}}$ ={id, σ_{11}}, $\mathbf{G_{14}}$ ={id, σ_{14}} , und drei mit 4 Elementen: $\mathbf{G_{2/4/8}}$ ={id, σ_2 ,σ_4,σ_8 }, $\mathbf{G_{7/4/13}}$ ={id, σ_7, σ_4, σ_{13}}, $\mathbf{G_{11/4/14}}$ ={id, σ_{11}, σ_4, σ_{14}} .
Andere Untergruppen gibt es in $\mathbf{G}(K_{15})$ nicht.

Fixkörper der Untergruppen

Die Menge der Elemente von $K_{15}= Q(\xi)$, die durch die Automorphismen einer Untergruppe U von G auf sich abgebildet werden, bilden einen Unterkörper F_U von $Q(\xi)$. Ist eine Untergruppe U Teilmenge einer Untergruppe V, so umfasst der Fixkörper von U den Fixkörper von V. Der Verband der Untergruppen von G , d.h. die Untergruppen von G in Bezug auf die Teilmengenrelation $\subseteq$, entspricht somit dem Verband der Fixkörper von $Q(\xi)$ in Bezug auf die Obermengenrelation $\supseteq$.

Verband der Untergruppen

	G_4	---	$G_{2/4/8}$	
$G_{id} \subseteq$--	G_{11}		$G_{7/4/13}$	--$\subseteq$ G
	G_{14}	---	$G_{11/4/14}$	

Verband der Fixkörper zu den Untergruppen

	F_{G4}	---	$F_{G2/4/8}$	
$Q(\xi)$ $\supseteq$--	F_{G11}		$F_{G7/4/13}$	--$\supseteq$ Q
	F_{G14}	---	$F_{G11/4/14}$	

Darstellung der Fixkörper als Erweiterungen von Q durch successive Adjunktion

$F_{G2/4/8} = Q(\sqrt{-15}) \subseteq \quad F_{G4} = F_{G2/4/8}(\sqrt{5})$

$F_{G7/4/13} = Q(\sqrt{-3}) \subseteq \quad F_{G4} = F_{G7/4/13}(\sqrt{5}) \quad \subseteq Q(\xi) = F_{G4}(\sqrt{(-10+2\sqrt{5})})$

$\qquad F_{G4} = F_{G11/4/14}(\sqrt{-3})$

$F_{G11/4/14} = Q(\sqrt{5}) \subseteq$ --- $F_{G11} = F_{G11/4/14}(\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}) \quad \subseteq Q(\xi) = F_{G11}(\sqrt{-3})$

$\qquad F_{G14} = F_{G11/4/14}(\sqrt{(30-6\sqrt{5})}) \quad \subseteq Q(\xi) = F_{G14}(\sqrt{-3})$

Die Übereinstimmung $F_{G2/4/8}(\sqrt{5}) = F_{G7/4/13}(\sqrt{5}) = F_{G11/4/14}(\sqrt{-3})$ ergibt sich aus $(\sqrt{-3})(\sqrt{5}) = \sqrt{-15}$, die von $F_{G4}(\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}) = F_{G11}(\sqrt{-3}) = F_{G14}(\sqrt{-3})$ aus $(\sqrt{-3})(\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}) = (\sqrt{3}\,\mathbf{i})(\sqrt{(10-2\sqrt{5})}\,\mathbf{i}) = -\sqrt{(30-6\sqrt{5})}$. Eine Schreibweise wie $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\,\mathbf{i}$ darf hier jedoch nicht so verstanden werden, dass neben $\sqrt{-3}$ auch beide Faktoren $\sqrt{3}$ und **i** in $Q(\xi)$ liegen. Ferner ist $F_{G7/4/13}= K_3$ und $F_{G11} = K_5$.
Das den Körper $Q(\xi)$ erzeugende Element hat im Köper $K_{15} = Q(\sqrt{5})(\sqrt{-3})(\sqrt{(-10+2\sqrt{5})})$ folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} \xi &= 1/8(1+\sqrt{5} + \sqrt{(30-6\sqrt{5})}) + 1/8(\sqrt{-3} +\sqrt{-15} - \sqrt{(-10+2\sqrt{5})}) \\ &= 1/8(1+\sqrt{5} +\sqrt{(30-6\sqrt{5})}) + 1/8(\sqrt{3} +\sqrt{15} - \sqrt{(10-2\sqrt{5})})\,\mathbf{i} \\ &= \cos 24° + \sin 24°\,\mathbf{i} \approx 0{,}9135 + 0{,}4067\,\mathbf{i} . \end{aligned}$$

Konstruktion der Erweiterungen

$\mathbf{F_{G11/4/14} = Q(\sqrt{5})}$

Durch id und σ_4 , σ_{11} , σ_{14} werden die Summen $\eta = \xi +\xi^4 + \xi^{11} +\xi^{14}$ und $\eta' = \xi^2 +\xi^7 + \xi^8 +\xi^{13}$ neben den Zahlen aus Q identisch auf sich abgebildet, denn die Summanden werden bei Anwendung von id, σ_4, σ_{11} oder σ_{14} auf η bzw. η' nur vertauscht, beispielsweise ist $\sigma_4(\xi^2+\xi^7+\xi^8+\xi^{13}) = \xi^8+\xi^{13}+\xi^2 +\xi^7$.
Zudem werden bei Anwendung von σ_2 , σ_7 , σ_8, σ_{14} die Summen einander vertauscht.
Nun ist $\eta+\eta' = \xi +\xi^2+\xi^4 +\xi^8 +\xi^7 +\xi^{11}+\xi^{13} +\xi^{14} = 1$, denn es ist die Summe aller Nullstellen des Polynoms $x^8 -x^7 +x^5 -x^4 + x^3 -x + 1$, zudem ist das Produkt $\eta\,\eta' = (\xi+\xi^4 +\xi^{11} +\xi^{14}) (\xi^2 +\xi^8 + \xi^7+\xi^{13}) = 2(\xi^3 +\xi^6 + \xi^9 +\xi^{12}) + (\xi +\xi^2+\xi^4 +\xi^8 +\xi^7 +\xi^{11}+\xi^{13} +\xi^{14}) = -2 +1 = -1$, denn $\xi^3 +\xi^6 + \xi^9 +\xi^{12}$ ist die Summe aller Nullstellen des Polynoms $x^4 +x^3 +x^2 +x +1$. Damit sind η und η' die Lösungen der Gleichung $x^2 - x -1 = 0$. Also ist $\eta = ½\,(1+\sqrt{5})$, $\eta' = ½\,(1- \sqrt{5})$ und $\eta-\eta' = \mathbf{\sqrt{5}}$.
Durch die Elemente von $\mathbf{G_{11/4/14}} =\{id, \sigma_{11}, \sigma_4, \sigma_{14}\}$ werden somit alle Zahlen der Form $a + b\,\mathbf{\sqrt{5}}$ auf sich abgebildet, wobei a , b beliebe rationale Zahlen aus Q sind. Diese Teilmenge in der Menge der Achter ist bezüglich der Addition/Subtraktion und Multiplikation/Division abgeschlossen und bildet ein Modell des Zahlkörpers $Q(\mathbf{\sqrt{5}})$. Also ist $\mathbf{F_{G11/4/14}} = Q(\mathbf{\sqrt{5}})$. Dies ist der kleinste Körper im Körper der reellen Zahlen, der $\mathbf{\sqrt{5}}$ enthält.

$\mathbf{F_{G2/4/8} = Q(\sqrt{-15})}$

Die Summen $\eta = \xi +\xi^2 + \xi^4 +\xi^8$ und $\eta' = \xi^7 +\xi^{11} + \xi^{13} +\xi^{14}$ sind invariant unter id, σ_2 , σ_4 und σ_8 .
Zudem werden bei Anwendung von σ_7 , σ_{11} , σ_{13}, σ_{14} die Summen einander vertauscht.
Es ist $\eta+\eta' = 1$ und $\eta\,\eta' = (\xi+\xi^2 +\xi^4 +\xi^8) (\xi^7 +\xi^{11} + \xi^{13}+\xi^{14}) = 4$, wobei man nach dem Ausmultiplizieren benutzt, dass die Summe $1+\xi +\xi^2+\xi^3 +\xi^4 +\xi^5 +...+\xi^{12}+\xi^{13} +\xi^{14}$ aller 15-ten als auch die Summe $1+\xi^5+\xi^{10}$ aller dritten Einheitswurzeln gleich Null ist. Damit sind η und η' die Lösungen der Gleichung $x^2 - x +4 = 0$, also $\eta = ½\,(1+\sqrt{-15})$, $\eta' = ½\,(1- \sqrt{-15})$ und damit dann $\eta-\eta' = \mathbf{\sqrt{-15}}$. Folglich ist $F_{G2/4/8} = Q(\eta) = Q(\sqrt{-15})$. Dies ist der kleinste Körper im Körper der komplexen Zahlen, der $\mathbf{\sqrt{-15}}$ enthält.

$F_{G7/4/13} = Q(\sqrt{-3})$
Die Summen $\eta = \xi + \xi^4 + \xi^7 + \xi^{13}$ und $\eta' = \xi^2 + \xi^8 + \xi^{11} + \xi^{13}$ sind invariant unter id, σ_7, σ_4 und σ_{11} . Zudem werden bei Anwendung von σ_2 , σ_8 , σ_{11}, σ_{13} die Summen einander vertauscht.
Es ist $\eta+\eta' = 1$ und $\eta\,\eta' = (\xi+\xi^4+\xi^7+\xi^{13})(\xi^2+\xi^8+\xi^{11}+\xi^{13}) = 1$, wobei man nach dem Ausmultiplizieren benutzt, dass die Summe $1+\xi^3+\xi^6+\xi^9+\xi^{12}$ aller 5-ten Einheitswurzeln gleich Null ist. Damit sind η und η' die Lösungen der Gleichung $x^2 - x + 1 = 0$, also $\eta = ½(-1+\sqrt{-3})$, $\eta' = ½(-1-\sqrt{-3})$ und damit dann $\eta-\eta' = \boldsymbol{\sqrt{-3}}$. Folglich ist $F_{G7/4/13} = Q(\eta) = Q(\sqrt{-3})$. Dies ist der kleinste Körper im Körper der komplexen Zahlen, der $\boldsymbol{\sqrt{-3}}$ enthält. Man erkennt, dass alle dritten Einheitswurzeln in ihm liegen .Man kann $K_3 = F_{G7/4/13}$ schreiben.

$F_{G14} = F_{G11/4/14}(\sqrt{30-6\sqrt{5}}) = Q(\sqrt{5})(\sqrt{30-6\sqrt{5}})$
Durch id und σ_{14} werden die Summen $\eta_1 = \xi + \xi^{14}$ und $\eta_2 = \xi^4 + \xi^{11}$ neben den Zahlen aus Q und $F_{G11/4/14}$ identisch auf sich abgebildet, denn die Summanden werden bei Anwendung von σ_{14} auf η_1 bzw. η_2 lediglich vertauscht. Zudem werden bei Anwendung von σ_4 , σ_{11} die Summen einander vertauscht. Nun ist hier $\eta_1 + \eta_2 = ½(1+\sqrt{5})$ und $\eta_1\eta_2 = (\xi+\xi^{14})(\xi^4+\xi^{11}) = \xi^5+\xi^{10}+\xi^3+\xi^{12} = ½(-1+\sqrt{3}\,\mathbf{i}) + ½(-1-\sqrt{3}\,\mathbf{i}) + ¼(-1+\sqrt{5}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,\mathbf{i}) + ¼(-1+\sqrt{5}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,\mathbf{i}) = ½(-3+\sqrt{5})$, wobei die Darstellungen in der komplexen Ebene von ξ^5 und ξ^{10} als dritte Einheitswurzel und von ξ^3 und ξ^{12} als 5-te Einheitswurzeln benutzt wurden.
Die Zahlen η_1, η_2 sind die Lösungen der Gleichung $x^2 - ½(1+\sqrt{5})\,x + ½(-3+\sqrt{5}) = 0$.
Also ist $\eta_1 = ¼(1+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}})$, $\eta_2 = ¼(1+\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}})$ und $2(\eta_1-\eta_2) = \boldsymbol{\sqrt{30-6\sqrt{5}}}$.
Durch die Elemente von $G_{14} = \{id, \sigma_{14}\}$ werden alle Zahlen der Form $c + d\sqrt{30-6\sqrt{5}}$ auf sich abgebildet, wobei c, d Zahlen aus $Q(\sqrt{5})$, also von der Form $a + b\sqrt{5}$ mit a ,b aus Q sind .
Diese Teilmenge in der Menge der Achter ist bezüglich der Addition/Subtraktion und Multiplikation/Division abgeschlossen und bildet ein Modell des Zahlkörpers $Q(\sqrt{5})(\sqrt{30-6\sqrt{5}})$.
Es ist der Fixkörper der Untergruppe G_{14} . Er ist der kleinste Körper im Körper der reellen Zahlen, der $\sqrt{5}$ und $\sqrt{30-6\sqrt{5}}$ enthält. Seine Elemente sind Linearkombinationen der Form
$a + b\sqrt{5} + c\sqrt{30-6\sqrt{5}} + d\sqrt{5}\sqrt{30-6\sqrt{5}}$ mit a, b, c, d aus Q .

$F_{G11} = F_{G11/4/14}(\sqrt{-10+2\sqrt{5}}) = Q(\sqrt{5})(\sqrt{-10+2\sqrt{5}})$
Die Summen $\eta_1 = \xi + \xi^{11}$ und $\eta_2 = \xi^4 + \xi^{14}$ sind invariant unter id und σ_{11} , neben den Zahlen aus Q und aus $F_{G11/4/14} = Q(\sqrt{5})$. Zudem werden bei Anwendung von σ_4 , σ_{14} die Summen einander vertauscht. Wegen $\eta_1 + \eta_2 = ½(1+\sqrt{5})$ und $\eta_1\eta_2 = (\xi+\xi^{11})(\xi^4+\xi^{14}) = 2 + \xi^5 + \xi^{10} = 1$ sind die Zahlen η_1, η_2 die Lösungen der Gleichung $x^2 - ½(1+\sqrt{5})\,x + 1 = 0$. Demnach ist unter Beachtung der Lage auf dem Einheitskreis $\eta_1 = ¼(1+\sqrt{5}-\sqrt{-10+2\sqrt{5}}) = \cos(-36°) + \sin(-36°)\,\mathbf{i}$ und
$\eta_2 = ¼(1+\sqrt{5}+\sqrt{-10+2\sqrt{5}}) = \cos(36°) + \sin(36°)\,\mathbf{i}$ sowie $2(\eta_2-\eta_1) = \boldsymbol{\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}$.
$F_{G11} = Q(\sqrt{5})(\sqrt{-10+2\sqrt{5}})$ ist der kleinste Körper im Körper der komplexen Zahlen, der die Zahlen $\sqrt{5}$ und $\sqrt{-10+2\sqrt{5}}$ enthält.
Die Quadrate $\eta_1^2 = (¼(1+\sqrt{5}-\sqrt{-10+2\sqrt{5}}))^2 = \cos(-72°) + \sin(-72°)\,\mathbf{i}$ und
$\eta_2^2 = (¼(1+\sqrt{5}+\sqrt{-10+2\sqrt{5}}))^2 = \cos(72°) + \sin(72°)\,\mathbf{i}$ sind primitive fünfte Einheitswurzeln und die Zahlen $-\eta_1$ und $-\eta_2$ primitive 10-te Einheitswurzeln.
F_{G11} enthält alle fünften Einheitswurzeln und damit den Körper K_5 aller fünften Einheitswurzeln .
Umgekehrt, K_5 enthält mit dem Negativen der 5-ten Einheitswurzeln alle 10-ten Einheitswurzeln , insbesondere also die Zahlen η_1, η_2 und somit den Körper F_{G11} . Demnach ist $F_{G11} = K_5 = K_{10}$.

$F_{G4} = F_{G11/4/14}(\sqrt{-3}) = Q(\sqrt{5})(\sqrt{-3})$
Die Summen $\eta_1 = \xi + \xi^4$ und $\eta_2 = \xi^{11} + \xi^{14}$ sind invariant unter id und σ_4 , neben den Zahlen aus Q und aus $F_{G11/4/14} = Q(\sqrt{5})$. Zudem werden bei Anwendung von σ_{11} , σ_{14} die Summen einander vertauscht. Wegen $\eta_1 + \eta_2 = ½(1+\sqrt{5})$ und $\eta_1\eta_2 = (\xi+\xi^4)(\xi^{11}+\xi^{14}) = 2 + \xi^{12} + \xi^3 = ½(3+\sqrt{5})$ sind die Zahlen η_1, η_2 die Lösungen der Gleichung $x^2 - ½(1+\sqrt{5})\,x + ½(3+\sqrt{5}) = 0$.

Also ist $\eta_1 = \frac14 (1+\sqrt5 + \sqrt{(-18 - 6\sqrt5)})$, $\eta_2 = \frac14 (1+\sqrt5 - \sqrt{(-18 - 6\sqrt5}$ und zudem ergibt sich nach leichter Rechnung $2(\eta_1 - \eta_2) = \boldsymbol{\sqrt{(-18 - 6\sqrt5)}} = (1+\sqrt5)\,\boldsymbol{\sqrt{-3}}$.
Damit ist $F_{G4} = Q(\sqrt5)(\sqrt{(-18 - 6\sqrt5)}) = Q(\sqrt5)(\sqrt{-3})$. Es ist er kleinste Körper im Körper der komplexen Zahlen, der die Zahlen $\sqrt5$ und $\sqrt{(-3)}$ enthält. Er besteht aus allen Linearkombinationen $a + b\sqrt5 + c\sqrt{-3} + d\sqrt{-15}$ mit Koeffizienten a, b, c, d aus Q .

$F_{G4} = F_{G7/4/13}(\sqrt5) = Q(\sqrt{-3})(\sqrt5)$
Die Summen $\eta_1 = \xi + \xi^4$ und $\eta_2 = \xi^7 + \xi^{13}$ sind invariant unter id und σ_4 , neben den Zahlen aus Q und aus $F_{G7/4/13} = Q(\sqrt{-3})$. Zudem werden bei Anwendung von σ_7 , σ_{13} die Summen einander vertauscht. Wegen $\eta_1 + \eta_2 = \frac12 (1+\sqrt{-3})$ und $\eta_1\eta_2 = (\xi + \xi^4)(\xi^7 + \xi^{13}) = \frac12 (1 - \sqrt{-3})$ sind die Zahlen η_1, η_2 die Lösungen der Gleichung $x^2 - \frac12 (1+\sqrt{-3})\,x + \frac12 (1-\sqrt{-3}) = 0$.
Dies ist eine quadratische Gleichung mit komplexen Koeffizienten. Zur Lösung ist die Quadratwurzel aus einer komplexen Zahl zu bestimmen. Das erfolgt nach folgender Formel:
$w = \sqrt{(a+ \mathbf{i}\, b)} = \pm \frac12 \sqrt2\, (\, \mathrm{sign}(b) \sqrt{(a + \sqrt{(a^2+b^2)})} + \mathbf{i}\, \sqrt{(-a + \sqrt{(a^2+b^2)})}\,)$,
denn damit ergibt sich $w^2 = a + \mathbf{i}\, \mathrm{sign}(b)\, |b|$ mit $|b| = \sqrt{b^2}$.
Man findet so die Lösungen $\eta_1 = \frac14 (1+\sqrt5 + \sqrt{-3}\,(1+\sqrt5))$ und $\eta_2 = \frac14 (1-\sqrt5 - \sqrt{-3}\,(1+\sqrt5\,))$.
Damit ergibt sich auf diesem Weg $F_{G4} = F_{G7/4/13}(\sqrt5) = Q(\sqrt{-3})(\sqrt5)$. Auch er besteht aus allen Linearkombinationen $a + b\sqrt5 + c\sqrt{-3} + d\sqrt{-15}$ mit Koeffizienten a, b, c, d aus Q .

$F_{G4} = F_{G2/4/8}(\sqrt{-3}) = Q(\sqrt{-15})(\sqrt5)$
Die Summen $\eta_1 = \xi + \xi^4$ und $\eta_2 = \xi^2 + \xi^8$ sind invariant unter id und σ_4 , neben den Zahlen aus Q und aus $F_{G2/4/8} = Q(\sqrt{-15})$. Zudem werden bei Anwendung von σ_4 , σ_8 die Summen einander vertauscht. Wegen $\eta_1 + \eta_2 = \frac12 (1+\sqrt{-15})$ und $\eta_1\eta_2 = (\xi + \xi^4)(\xi^2 + \xi^8) = \xi^3 + \xi^6 + \xi^9 + \xi^{12} = -1$ sind die Zahlen η_1, η_2 die Lösungen der Gleichung $x^2 - \frac12 (1+\sqrt{-15})\,x - 1 = 0$ ..
Auch dies ist eine quadratische Gleichung mit komplexen Koeffizienten.
Ihre Lösungen sind $\eta_1 = \frac14 (1+\sqrt5 + \sqrt{-15} + \sqrt{-3}\,)$ und $\eta_2 = \frac14 (1-\sqrt5 + \sqrt{-15} - \sqrt{-3}\,)$.
Auf diesem Wege ergibt sich $F_{G4} = F_{G2/4/8}(\sqrt5) = Q(\sqrt{-15})(\sqrt5)$. Auch er besteht aus allen Linearkombinationen $a + b\sqrt5 + c\sqrt{-3} + d\sqrt{-15}$ mit Koeffizienten a, b, c, d aus Q .

$K_{15} = F_{G14}(\sqrt{-3}) = Q(\sqrt5)(\sqrt{(30 - 6\sqrt5)})(\sqrt{-3})$
Die Zahlen ξ und $\xi^{14} = 1/\xi$ werden durch σ_{14} lediglich vertauscht und sind die Nullstellen des Polynoms $(x - \xi)(x - \xi^{14}) = x^2 - (\zeta + \xi^{14})x + 1$, also die Lösungen der Gleichung $x^2 - b\,x + 1 = 0$ mit $b = \xi + \xi^{14} = \frac14 (1+\sqrt5 + \sqrt{(30 - 6\sqrt5)})$, gemäß obigem bei F_{G14} .
Für die Lösungen $\xi = \frac12 b + \sqrt{(\frac14 b^2 - 1)}$ und $\xi^{14} = \frac12 b - \sqrt{(\frac14 b^2 - 1)}$ ergibt sich nach etwas Rechnung anhand von $b^2 = 1/16\,(36 - 4\sqrt5 + 2(1+\sqrt5)\sqrt{(30 - 6\sqrt5)})$ und
$\frac12 \sqrt{(b^2 - 4)} \quad = 1/8 \sqrt{(-28 - 4\sqrt5 + 2(1+\sqrt5)\sqrt{(30 - 6\sqrt5)})} = 1/8 \sqrt{(28 + 4\sqrt5 - 2(1+\sqrt5)\sqrt{(30 - 6\sqrt5)})}\ \mathbf{i}$
zunächst $\quad \xi = 1/8(1+\sqrt5 + \sqrt{(30 - 6\sqrt5)}) + 1/8 \sqrt{(28 + 4\sqrt5 - 2(1+\sqrt5)\sqrt{(30 - 6\sqrt5)})}\ \mathbf{i}$
und über $\sqrt{(+28 + 4\sqrt5 - 2(1+\sqrt5)\sqrt{(30 - 6\sqrt5)})} = \sqrt3 + \sqrt{15} - \sqrt{(10 - 2\sqrt5)}$ **(*)**
schließlich $\quad \xi = 1/8(1+\sqrt5 + \sqrt{(30 - 6\sqrt5)}) + 1/8\,(\sqrt3 + \sqrt{15} - \sqrt{(10 - 2\sqrt5)})\ \mathbf{i}$
$\qquad = \cos 24° + \sin 24°\ \mathbf{i} \approx 0{,}9135 + 0{,}4067\ \mathbf{i}$.

Der Körper K_{15} zeigt sich auf diese Weise als die Erweiterung von $F_{G14} = Q(\sqrt5)(\sqrt{(30 - 6\sqrt5)}$ durch Adjunktion der imaginären Zahl $8(\xi - \xi^{14}) = (\sqrt{-3} + \sqrt{-15} - \sqrt{(-10 + 2\sqrt5)})$.
Aus $(\sqrt{-3} + \sqrt{-15} - \sqrt{(-10 + 2\sqrt5)}) = (\sqrt{-3})(1+\sqrt5 - \sqrt{(10 - 2\sqrt5)/3)}) = (\sqrt{-3})\,(1+\sqrt5 - 1/3\sqrt{(30 - 6\sqrt5)})$ ergibt sich, dass mit $8(\xi - \xi^{14})$ auch $\sqrt{-3}$ Element der Erweiterung ist .
Also kann man ihn auch durch $K_{15} = Q(\sqrt5)(\sqrt{(30 - 6\sqrt5)}(\sqrt{-3}\,)$ darstellen..
In dieser Darstellung besteht K_{15} aus allen Zahlen der Form $e_1 + e_2\,(\sqrt{-3})$, wobei e_1, e_2 aus F_{G14} sind, also von der Form $e_1 = f_{11} + f_{12}\sqrt{(30 - 6\sqrt5)}$, $e_2 = f_{21} + f_{22}\sqrt{(30 - 6\sqrt5)}$ mit
$f_{11} = a_1 + a_2\sqrt5$, $f_{12} = a_3 + a_4\sqrt5$, $f_{21} = a_5 + a_6\sqrt5$, $f_{22} = a_7 + a_8\sqrt5$, wobei $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ aus Q.
Es ist eine Darstellung von K_{15} durch Linearkombinationen über Q, deren Basiselemente die acht Zahlen 1, $\sqrt5$, $\sqrt{(30 - 6\sqrt5)}$, $\sqrt5\,\sqrt{(30 - 6\sqrt5)}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-15}$, $\sqrt{-3}\,\sqrt{(30 - 6\sqrt5)}$, $\sqrt{-15}\,\sqrt{(30 - 6\sqrt5)}$ sind .

$K_{15} = F_{G11}(\sqrt{(-3)}$ = $Q(\sqrt{5})(\sqrt{(-10+2\sqrt{5})})(\sqrt{-3})$

Die Zahlen ξ und ξ^{11} werden durch σ_{11} lediglich vertauscht und sind die Nullstellen des Polynoms $(x-\xi)(x-\xi^{11}) = x^2 - (\zeta+\xi^{11})x + \xi^{12} = x^2 + \xi^6 x + \xi^{12}$, denn ξ^5, ξ^{10} sind die primitiven dritten Einheitswurzeln, also $\xi = \xi^{10}\ \xi^6 = ½\,(-1-\sqrt{3}\,\mathbf{i})\,\xi^6$, $\xi^{11} = \xi^5\,\xi^6 = ½\,(-1+\sqrt{3}\,\mathbf{i})\,\xi^6$, $\zeta+\xi^{11} = -\xi^6$.

$\xi^6 = 1/4\,(-1-\sqrt{5}) + 1/4\sqrt{(10-2\sqrt{5})}\,\mathbf{i}$ ist eine primitive 5 Einheitswurzel.. Damit ist.

ζ = $1/8\,(-1-\sqrt{3}\,\mathbf{i})\,(-1-\sqrt{5} + \sqrt{(10-2\sqrt{5})}\,\mathbf{i})$

= $1/8\,(1+\sqrt{5} + \sqrt{(30-6\sqrt{5})} + (\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{(10-2\sqrt{5})})\,\mathbf{i})$

= $1/8\,(1+\sqrt{5} + \sqrt{(30-6\sqrt{5})} + 1/8\,(\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{(10-2\sqrt{5})})\,\mathbf{i}$

$K_{15} = F_{G4}\,(\sqrt{(-10+2\sqrt{5})})$ = $Q(\sqrt{5})\,(\sqrt{-3})(\sqrt{(-10+2\sqrt{5})})$

Die Zahlen ξ und ξ^4 werden durch σ_4 lediglich vertauscht und sind die Nullstellen des Polynoms $(x-\xi)(x-\xi^4) = x^2 - (\zeta+\xi^4)x + \xi^5$, wobei $\xi^5 = \cos120° + \sin120°\,\mathbf{i}$ = $½\,(-1+\sqrt{3}\,\mathbf{i})$ eine primitive dritte Einheitswurzel.

Zudem ist $\zeta + \xi^4$ = $\cos36° * \cos96° + (\sin24° + \sin96°)\,\mathbf{i}$

= $2\cos60°\cos(-36°) + 2\sin60°\cos(-36°)\,\mathbf{i}$

= $2\cos36°\,(½\,(1+\sqrt{3}\,\mathbf{i})) = 2\cos36°\,(\cos60° + \sin60°\,\mathbf{i})$

also $¼\,(\zeta+\xi^4)^2$ = $\cos^2 36°\,(\cos120° + \sin120°\,\mathbf{i}) = \cos^2 36°\ \xi^5$.

Aus $-\xi^9 = \cos36° + \sin36°\,\mathbf{i}$ ergeben sich die Werte

$\cos36° = ¼\,(1+\sqrt{5})$, $\sin36° = ¼\,(10-2\sqrt{5})$ sowie $\cos^2 36° = 1/16(6+2\sqrt{5})$, $\sin^2 36° = 1-\cos^2 36°$.

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - (\zeta+\xi^4)x + \xi^5 = 0$ sind damit

$x_{1/2}$ = $½\,(\zeta+\xi^4) \pm \sqrt{((\cos^2 36° - 1)\,\xi^5)}$

= $½\,(\zeta+\xi^4) \pm \sin36°\,\sqrt{-\xi^5}$

= $½\,(\zeta+\xi^4) \pm \sin36°\,\sqrt{(\cos300° + \sin300°\,\mathbf{i})}$

= $½\,(\zeta+\xi^4) \pm \sin36°\,(\cos150° + \sin150°\,\mathbf{i})$

= $\cos36°\,(½\,(1+\sqrt{3}\,\mathbf{i})) \pm ¼\,\sqrt{(10-2\sqrt{5})}\,(-½\sqrt{3} + ½\,\mathbf{i})$

= $1/8\,(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{3}\,\mathbf{i}) \pm 1/8\,\sqrt{(30-6\sqrt{5})} \pm 1/8\,\sqrt{(10-2\sqrt{5})}\,\mathbf{i}$

= $1/8\,(1+\sqrt{5} \pm \sqrt{(30-6\sqrt{5})}) + 1/8\,(\sqrt{3}+\sqrt{15} \pm\sqrt{(10-2\sqrt{5})})\,\mathbf{i}$

Aus einer Vorzeichenbetrachtung folgt

ζ = $1/8\,(1+\sqrt{5}+\sqrt{(30-6\sqrt{5})} + 1/8\,(\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{(10-2\sqrt{5})})\,\mathbf{i}$

Konstruktion von ξ mit Zirkel und Lineal, Konstruktion eines regelmäßigen 15-Ecks.

Mit Zirkel und Lineal sind aus einer gegebenen Strecke OE Vielfache und Teile von OE als auch Senkrechte durch bereits konstruierte Punkte, insbesondere auch die zu 1 = OE gehörige imaginäre Einheit **i** konstruierbar, zudem durch Schnitt von Kreisen mit konstruierten Strecken als Radien um konstruierte Punkte als Zentrum die Lösungen von quadratischen Gleichungen mit Koeffizienten aus konstruierten Strecken.

Die Darstellung $\xi = 1/8(1+\sqrt{5} + \sqrt{(30-6\sqrt{5})}) + 1/8\,(\sqrt{3}+\sqrt{15} - \sqrt{(10-2\sqrt{5})})\ \mathbf{i}$ der primitiven 15-ten Einheitswurzel $\xi = \cos24° + \sin 24°\,\mathbf{i}$ zeigt, dass sie durch Quadratwurzeln aus 3, 5, 15, $30-6\sqrt{5}$, und $10-2\sqrt{5}$ in der von OE und **i** aufgespannten Ebene darstellbar sind . Also sind sie mit Zirkel und Lineal über die Lösungen der betreffenden quadratischen Gleichungen zu konstruieren..

Die komplexe Zahl $\xi = \cos24° + \sin 24°\,\mathbf{i}$ markiert in der komplexen Ebene die erste Ecke des regelmäßigen 15-Ecks, wenn man OE im Gegenuhrzeigersinn um 24° dreht. Durch Antragen weiterer Winkel von 24° erhält man die übrigen Ecken. An der Darstellung von ξ ist erkennbar, mit welchen Schritten die Konstruktion von ξ zu bewerkstelligen ist.

Der Winkel 24° ist die Summe aus einem Viertel von 60° und einem Achtel aus 72° . Auf diesem Wege war bereits den Griechen des Altertums die Konstruktion des regelmäßigen 15-Ecks mit Zirkel und Lineal anhand der Methoden zur Konstruktion von regelmäßigen 5-Eckes und 6-Ecks bekannt.

Seitenlänge des regelmäßigen 15-Ecks im Einheitskreis: $s = ½\,\sqrt{(7-\sqrt{5}-\sqrt{(30-6\sqrt{5})})}$.

Man bestätigt dies, indem man mit dem Ansatz $½\,s = ¼\,\sqrt{(7-\sqrt{5}-\sqrt{(30-6\sqrt{5})})} = \sin12°$ wie folgt rechnet: $\cos12° = \sqrt{(1-\sin^2 12°)} = ¼\,\sqrt{(9+\sqrt{5}+\sqrt{(30-6\sqrt{5})})}$, also

$\cos 24° = \cos^2 12° - \sin^2 12° = 1/16\ (2+2\sqrt{5} + 2\sqrt{(30 - 6\sqrt{5})}) = 1/8(1+\sqrt{5} + \sqrt{(30 - 6\sqrt{5})})$,
$\sin 24° = 2\sin 12°\ \cos 12° = 1/8\ \sqrt{(28 + 4\sqrt{5} - 2(1+\sqrt{5})\sqrt{(30-6\sqrt{5})})} = 1/8\ (\sqrt{3} + \sqrt{15} - \sqrt{(10-2\sqrt{5})})$ nach (*).

Hauptsatz der Galois'schen Theorie
Alle Elemente, die unter den Automorphismen einer Untergruppe von **G** fix bleiben, bilden einen Unterkörper in K_{15} und umgekehrt gibt es zu jedem Unterkörper von K_{15} eine Untergruppe in **G**.
$\mathbf{G_4}$ ist die Galois'sche Gruppe der Erweiterung $\mathbf{F_{G4}(\sqrt{(-10+2\sqrt{5})})}$.
$\mathbf{G_{11}}$ ist die Galois'sche Gruppe der Erweiterung $\mathbf{F_{G11}(\sqrt{-3})}$
$\mathbf{G_{14}}$ ist die Galois'sche Gruppe der Erweiterung $\mathbf{F_{G14}\,(\sqrt{-3})}$

Die Faktorgruppe von $\mathbf{G/G_4}$ ist die Galois'sche Gruppe von $\mathbf{Q(\sqrt{5})(\sqrt{-3})}$
Die Faktorgruppe von $\mathbf{G/G_{11}}$ ist die Galois'sche Gruppe von $\mathbf{Q(\sqrt{5})(\sqrt{(-10+2\sqrt{5})})}$
Die Faktorgruppe von $\mathbf{G/G_{14}}$ ist die Galois'sche Gruppe von $\mathbf{Q(\sqrt{5})(\sqrt{(30-6\sqrt{5})})}$

$\mathbf{G_{2/4/8}}$ ist die Galois'sche Gruppe der Erweiterung $\mathbf{F_{G2/4/8}\,(\sqrt{5})(\sqrt{(-10+2\sqrt{5})})}$
$\mathbf{G_{7/4/13}}$ ist die Galois'sche Gruppe der Erweiterung $\mathbf{F_{G7/4/13}\,(\sqrt{5})(\sqrt{(-10+2\sqrt{5})})}$
$\mathbf{G_{11/4/14}}$ ist die Galois'sche Gruppe der Erweiterung $\mathbf{F_{G11/4/14}\,(\sqrt{-3})(\sqrt{(-10+2\sqrt{5})})}$

Die Faktorgruppe von $\mathbf{G/G_{2/4/8}}$ ist die Galois'sche Gruppe von $\mathbf{Q(\sqrt{-15})}$
Die Faktorgruppe von $\mathbf{G/G_{7/4/13}}$ ist die Galois'sche Gruppe von $\mathbf{Q(\sqrt{-3})}$
Die Faktorgruppe von $\mathbf{G/G_{11/4/14}}$ ist die Galois'sche Gruppe von $\mathbf{Q(\sqrt{5})}$.

Aussagen zum Grad der erzeugenden Gleichungen:
G hat 8 Elemente <==> K_{15} wird über Q durch die Lösung einer Gleichung 8.Grades erzeugt.
Die Koeffizienten der Gleichung sind aus Q .
$\mathbf{G_{14}}$ hat 2 Elemente <==> K_{15} wird über $\mathbf{F_{G14}}$ durch die Lösung einer Gleichung 2.Grades erzeugt .
Die Koeffizienten der Gleichung sind aus $\mathbf{F_{G14} = Q(\sqrt{5})(\ \sqrt{(30 - 6\sqrt{5}}}$.
Die Faktorgruppe von $\mathbf{G/G_{14}}$ hat 4 Elemente <==> $\mathbf{F_{G14}}$ wird über Q durch die Lösung einer Gleichung 4.Grades erzeugt . Die Koeffizienten der Gleichung sind aus Q.
$\mathbf{G_{11/4/14}}$ hat 4 Elemente <==> K_{15} wird über $\mathbf{F_{G11/4/14}}$ durch die Lösung einer Gleichung 4.Grades erzeugt . Die Koeffizienten der Gleichung sind aus $\mathbf{F_{G11/4/14} = Q(\sqrt{5})}$.
Die Faktorgruppe von $\mathbf{G/G_{11/4/14}}$ hat 2 Elemente <==> $\mathbf{F_{G4} = Q(\sqrt{5})}$ wird über Q durch die Lösung einer Gleichung 2.Grades erzeugt.
Analoge Aussagen hat man für $\mathbf{G_4}$ in bezug auf $\mathbf{F_{G4}}$ sowie für $\mathbf{G_{11}}$ in bezug auf $\mathbf{F_{G11}}$.

Gleichung für alle Einheitswurzeln in K_{15} , Zerfällungskörper
Jedes 12-te Einheitswurzel ist eine Nullstelle des Polynoms $x^{15}-1$.
Dies Polynom ist das Produkt folgender *irreduziblen* , d.h. in Q nicht weiter zerlegbaren Polynome:
$Q1= x-1$, $Q3=x^2+x+1$, $Q5= x^4+x^3+x^2+x+1$, $Q15= x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$.
Die Nullstellen dieser Polynome sind primitiven Einheitswurzeln der Ordnung 1, 3, 5, bzw.15.
Die Ordnungen der Einheitswurzeln sind die Teiler von 15. Daraus ergibt sich
$x^{15}-1 = Q1*Q3*Q5*Q15$, denn die 15-ten Einheitswurzeln sind genau jene, die einen Teiler von 15 als Ordnung haben.

Das Produkt $Q3*Q5*Q15= (x^{15}-1)/(x-1) = x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ hat im Grundkörper Q keine Nullstelle, zerfällt jedoch in K_{15} vollständig in Linearfaktoren.
Der Körper K_{15} ist der kleinste Zahlkörper über dem Grundkörper Q, in welchem das Polynom $x^{15}-1$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt. K_{15} ist durch diese Eigenschaft strukturell bestimmt. In dieser Sicht nennt man K_{15} den *Zerfällungskörper* von $x^{15}-1$ über Q.

Gleichung für erzeugenden Elemente der Erweiterung $K_{15} = Q(\xi)$
Die Gleichung 8.Grades für erzeugende Elemente eines Modells des Körpers K_{15} über Q ist
$x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1 = 0$. Sie ist die in Q irreduzible *Kreisteilungsgleichung* für 15-te Einheitswurzeln . Ihre Lösungen sind $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi^2}, \boldsymbol{\xi^4}, \boldsymbol{\xi^8}, \boldsymbol{\xi^7}, \boldsymbol{\xi^{11}}, \boldsymbol{\xi^{13}}, \boldsymbol{\xi^{14}}$.

Gleichungen für erzeugenden Elemente des Unterkörper Q(√5)
$x^2 - x - 1 = 0$ mit den Lösungen $\eta = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, $\eta' = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$
$x^2 - 5 = 0$. mit den Lösungen sind $\pm(\eta-\eta') = \pm\mathbf{\sqrt{5}}$
Gleichungen für erzeugenden Elemente des Unterkörper Q(√–3)
$x^2 + x + 1 = 0$ mit den Lösungen $\mathbf{e_3} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\,\mathbf{i})$, $\mathbf{e_3'} = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}\,\mathbf{i})$
$x^2 + 3 = 0$. mit den Lösungen sind $\pm(\mathbf{e_3} - \mathbf{e_3'}) = \pm\mathbf{\sqrt{-3}}$.

Gleichungen für erzeugenden Elemente des Unterkörper Q(e₅) = Q(√5)(√–(10+2√5))
$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ mit den vier Lösungen $\mathbf{e_5} = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{(10+2\sqrt{5})}\,\mathbf{i})$
oder $x^2 - 5 = 0$ über Q und dann $x^2 + (10+2\sqrt{5}) = 0$ über Q(√5