Erforschung des Körpers der 12-ten Einheitswurzeln

Für Gerrit vom Opa im Februar 2006

Der Körper der 12. Einheitswurzeln ist ein Erweiterungskörper des Körpers Q der rationalen Zahlen. Ein Modell dieses *Kreisteilungskörpers* K_{12} wird erzeugt durch Hinzunahme eines Lösungselements ξ der in Q *irreduziblen*[1] Gleichung $x^4 - x^2 + 1 = 0$ und aller unter Einbezug rationaler Zahlen sich daraus durch Addition/Subtraktion und Multiplikation/Division ergebenden Elemente.
Es gilt $\xi^4 = \xi^2 -1$ und damit $\xi^6 = \xi^4 - \xi^2 = -1$, also $\xi^{12} = 1$. Nach diesen Formeln können Potenzen ξ^n mit $n \geq 4$ als Summen aus Potenzen von ξ mit Exponenten $n \leq 3$ dargestellt werden. Wegen $\xi^{12} = 1$ gibt es nur 12 verschiedene Potenzwerte von ξ . Man nennt sie 12-te Einheitswurzeln.
In der Ebene der komplexen Zahlen liegen diese Potenzwerte von ξ auf dem Einheitskreis an den Ecken eines regelmäßigen Zwölfecks (Abb.1) .
Anhand der Winkelfunktionen sin und cos und der imaginären Einheit **i** mit $\mathbf{i}^2 = -1$ kann man sie durch $\xi^k = \cos(k*30°)+ \sin(k*30°)\,\mathbf{i}$, k=1,2,3,...,12 , darstellen.
Speziell ergibt sich: $\xi = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\mathbf{i}$, $\xi^3 = \mathbf{i}$, $\xi^4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathbf{i}$, und damit z.B. $2\xi - \xi^3 = \mathbf{\sqrt{3}}$.

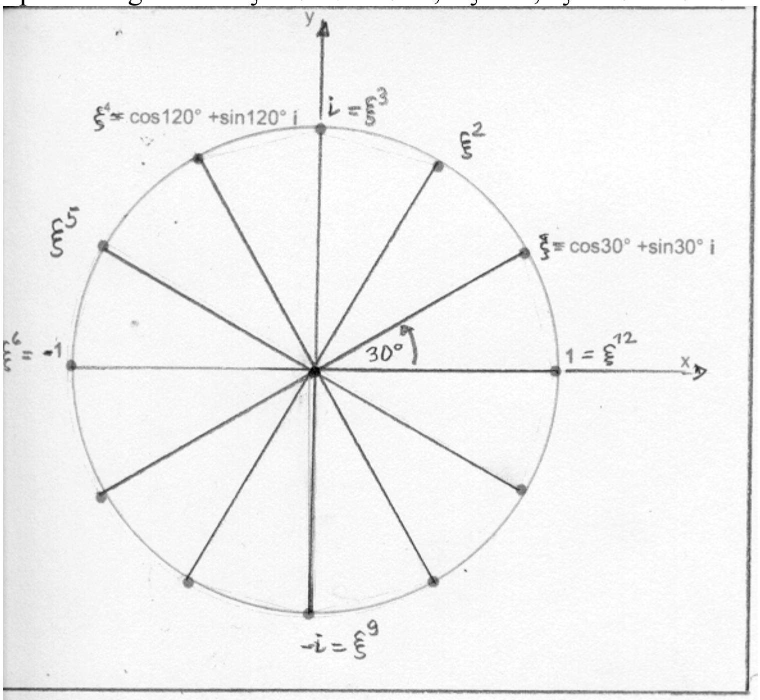

Abb1: 12-te Einheitswurzeln in der komplexen Zahlenebene

Körperkonstruktion durch Adjunktion

Unser Modell des Zahlkörpers K_{12} wurde durch Hinzunahme der primitiven 12-ten Einheitswurzel $\boldsymbol{\xi}$ zum Grundkörper Q konstruiert , indem man alle Linearkombinationen $a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + d$ aus den vier Basis-Elementen ξ^3 , ξ^2, ξ , 1 bildet, wobei die Koeffizienten a, b, c, d der Linearkombinationen beliebig aus Q entnommen wurden. Will man dies hervorheben, schreibt man $K_{12} = Q(\boldsymbol{\xi})$ und sagt, der Erweiterungskörper sei durch *Adjunktion* von ξ zu Q entstanden. Er ist der kleinste Zahlkörper, über dem Grundkörper, der das neu hinzugenommene Element enthält.
Schreibt man diese Linearkombinationen als „Vierer“ (a,b,c,d) , so ist (0,0,0,0) das Nullelement und (0,0,0,1) das Einselement des Grundkörpers Q und z.B. (1,0,0,0) = **i** sowie (-1,0,2,0) = $\mathbf{\sqrt{3}}$.

Potenzen von ξ^n als Vierer					
N	Vierer	n	Vierer	N	Vierer
0 oder 12	(0, 0, 0, 1)				
1	(0 ,0, 1, 0)	5	(-1, 0, 1, 0)	9	(-1, 0, 0, 0)
2	(0, 1, 0, 0)	6	(0, 0, 0, -1)	10	(0, 1, 0, -1)
3	(1, 0, 0, 0)	7	(0 ,0, -1, 0)	11	(1,0, -1, 0)
4	(0, -1, 0, 1)	8	(0, -1, 0, 0)	12	(0, 0, 0, 1)

[1] Eine Gleichung p(x)=0 heißt irreduzibel in Q , wenn das Polynom p(x) in Q nicht in Faktoren zerlegbar ist.

Konjugierte Elemente
Neben $x_1 = \xi$ sind die Elemente $x_2 = \xi^5$, $x_3 = \xi^7$, $x_4 = \xi^{11}$ Lösungen der Gleichung $x^4 - x^2 + 1 = 0$, genügen also auch der Formel $x^4 = x^2 - 1$. Anhand der Tabelle lässt sich dies leicht kontrollieren. Die Elemente ξ, ξ^5, ξ^7, ξ^{11} sind somit als Lösungen der selben Gleichung einander *konjugiert*. Unter den Zahlen 1,2,3,...,12 sind die Exponenten 5, 7, 11 neben 1 die zu 12 teilerfremden Zahlen. Somit sind x_1, x_2, x_3, x_4 die primitiven 12-ten Einheitswurzeln. Ihre Potenzen erzeugen alle 12-ten Einheitswurzeln. Analog zu $x_1 = \xi$ könnten Potenzen von x_2, also $x_2^0 = 1$, $x_2^1 = \xi^5$, $x_2^2 = \xi$, $x_2^3 = \xi^2$ oder die von x_3 bzw. x_4 als Basis zur Darstellung von Vierer (a,b,c,d) dienen. Die Formel zur Reduktion der Exponenten $n \geq 4$ bleibt dabei erhalten.

Automorphismen von K_{12}
Die Ersetzung von $x_1 = \xi$ durch $x_2 = \xi^5$ bewirkt eine Abbildung unter den Vierern, die mit der Addition als auch mit der Multiplikation in K_{12} verträglich ist: Das Bild einer Summe ist gleich der Summe der Bilder und das Bild eines Produkts gleich dem Produkt der Bilder ist. Die Vierer (0,0,0,d), die für Zahlen aus Q stehen, werden dabei identisch auf sich abgebildet. Das Ersetzen von $x_1 = \xi$ durch $x_2 = \xi^5$ ist damit ein *Automorphismus* von K_{12}. Wir schreiben ihn hier σ_5.
Das Ersetzen von $x_1 = \xi$ durch $x_3 = \xi^7$ also auch das von $x_1 = \xi$ durch $x_4 = \xi^{11}$ sind entsprechend Automorphismen von K_{12}, die wir σ_7 bzw. σ_{11} schreiben. Jeder dieser Automorphismen ist durch die Permutation unter den vier konjugierten Wurzeln ξ, ξ^5, ξ^7, ξ^{11}, die er bewirkt, charakterisiert. Zweimalige Anwendung von σ_5 auf ξ, kann als Potenzieren von ξ mit 25 betrachten werden, denn $\sigma_5(\sigma_5(\xi)) = \sigma_5(\xi^5) = (\xi^5)^5 = \xi^{25}$, und das ist hier wegen $\xi^{25} = \xi$ gleichbedeutend mit der identischen Abbildung. Wir schreiben dies $\sigma_5^2 = \mathrm{id}$. Entsprechendes gilt für die zweimalige Anwendung von σ_7 oder σ_{11}. Die Hintereinanderausführung von σ_7 nach σ_5 ergibt bei analoger Betrachtung ein Potenzieren mit 35. Wegen $\xi^{35} = \xi^{11}$ führt dies zu $\sigma_7 \sigma_5 = \sigma_{11}$.
Neben den betrachteten Automorphismen und der identischen Abbildung $\sigma_1 = \mathrm{id}$, erlaubt K_{12} keine anderen mit der Addition und Multiplikation verträglichen Abbildungen auf sich.

Gruppen von Automorphismen
Die vier Automorphismen id, σ_5, σ_7, σ_{11} bilden bezüglich der Hintereinanderausführung die *Galois'sche Gruppe* **G**(K_{12}) des Körpers K_{12} über dem Grundkörper Q. Sie ist kommutativ, jedoch nicht zyklisch. Die Hintereinanderausführung von Automophismen erfolgt gemäß folgender Tabelle:

id	σ_5	σ_7	σ_{11}
σ_5	id	σ_{11}	σ_7
σ_7	σ_{11}	id	σ_5
σ_{11}	σ_7	σ_5	id

Jedes der Elemente σ_5 σ_7 σ_{11} hat die Ordnung 2, d.h. die zweimalige Ausführung ergibt die Identität id. Außer der Gruppe selbst und der trivialen Untergruppe $\mathbf{G}_{\mathrm{id}} = \{\mathrm{id}\}$ gibt es die drei Untergruppen $\mathbf{G_5} = \{\mathrm{id}, \sigma_5\}$, $\mathbf{G_7} = \{\mathrm{id}, \sigma_7\}$, $\mathbf{G_{11}} = \{\mathrm{id}, \sigma_{11}\}$.
Andere echte Untergruppen, abgesehen von der trivialen G_{id}, gibt es in **G**(K_{12}) nicht.

Fixkörper der Untergruppen
1) Durch id und σ_5 wird neben den Zahlen aus Q die imaginäre Einheit $\mathbf{i} = \xi^3$ identisch auf sich abgebildet, denn $\sigma_5(\xi^3) = \xi^{15} = \xi^3$. Damit werden durch die Elemente von $\mathbf{G_5} = \{\mathrm{id}, \sigma_5\}$ alle komplexen Zahlen der Form $a + b\,\mathbf{i}$ auf sich abgebildet, wobei a, b beliebe rationale Zahlen aus Q sind. Diese Teilmenge in der Menge der Vierer ist bezüglich der Addition/Subtraktion und Multiplikation/Division abgeschlossen und bildet ein Modell des Zahlkörpers Q(**i**). Es ist der Fixkörper der Untergruppe $\mathbf{G_5}$. Er ist der kleinste Körper im Körper der komplexen Zahlen, der **i** enthält und wird zu Ehren seines Entdeckers *Gauss'scher Zahlkörper* genannt.

2) Durch id und σ_7 wird die primitive 3-te Einheitswurzel $\mathbf{e_3} = \xi^4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathbf{i}$ identisch auf sich abgebildet, denn $\sigma_7(\xi^4) = \xi^{28} = \xi^4$. Damit werden durch die Elemente von $\mathbf{G_7} = \{\mathrm{id}, \sigma_7\}$ alle komplexen Zahlen der Form $a + b\,\mathbf{e_3}$ auf sich abgebildet, wobei a, b beliebe rationale Zahlen aus Q sind. Die Menge dieser Zahlen bildet den Zahlkörper Q($\mathbf{e_3}$). Er entsteht durch Adjunktion von $\mathbf{e_3}$ zu Q und ist der Fixkörper von $\mathbf{G_7}$. Er ist der kleinste Körper im Körper der komplexen Zahlen, der die dritte Einheitswurzel $\mathbf{e_3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathbf{i}$ enthält.

3) Durch id und σ_{11} wird die reelle Zahl $2\xi - \xi^3 = \sqrt{3}$ identisch auf sich abgebildet, denn $\sigma_{11}(2\xi - \xi^3) = 2\xi^{11} - \xi^{33} = -2\xi^5 + \xi^3 = -2(\xi^3 - \xi) + \xi^3 = -\xi^3 + 2\xi$. Damit werden durch die Elemente von $\mathbf{G}_{11} = \{id, \sigma_{11}\}$ alle reellen Zahlen der Form $a + b\sqrt{3}$ auf sich abgebildet, wobei a, b beliebe rationale Zahlen aus Q sind. Die Menge dieser Zahlen bildet den Zahlkörper Q($\sqrt{3}$). Er entsteht durch Adjunktion von $\sqrt{3}$ zu Q und ist der Fixkörper von $\mathbf{G}_{11}$ Er ist der kleinste Körper im Körper der reellen Zahlen, der $\sqrt{3}$ enthält.

Fixkörper der galoischen Gruppe $\mathbf{G}(K_{12})$ ist ist der Grundkörper Q,
Fixkörper der trivialen Untergruppe $\mathbf{G}_{id}$ ist der Erweiterungskörper $K_{12} = Q(\xi)$.

Hauptsatz der Galois'schen Theorie
Alle Elemente, die unter den Automorphismen einer Untergruppe von $\mathbf{G}(K_{12})$ fix bleiben, bilden einen Unterkörper in K_{12} und umgekehrt gibt es zu jedem Unterkörper von K_{12} eine Untergruppe in $\mathbf{G}(K_{12})$.
$\mathbf{G}_5$ ist die Galois'sche Gruppe der Erweiterung von Q(**i**) auf K_{12}.
$\mathbf{G}_7$ ist die Galois'sche Gruppe der Erweiterung von Q($\mathbf{e}_3$) auf K_{12}.
$\mathbf{G}_{11}$ ist die Galois'sche Gruppe der Erweiterung von Q($\sqrt{3}$) auf K_{12}.

Die Faktorgruppe von $\mathbf{G}(K_{12}) / \mathbf{G}_5$ ist die Galois'sche Gruppe des Unterkörpers Q(**i**).
Die Faktorgruppe von $\mathbf{G}(K_{12}) / \mathbf{G}_7$ ist die Galois'sche Gruppe des Unterkörpers Q($\mathbf{e}_3$).
Die Faktorgruppe von $\mathbf{G}(K_{12}) / \mathbf{G}_{11}$ ist die Galois'sche Gruppe des Unterkörpers Q($\sqrt{3}$).

Aussagen zum Grad der erzeugenden Gleichungen:
$\mathbf{G}(K_{12})$ hat 4 Elemente $\Longleftrightarrow$ K_{12} wird über Q durch die Lösung einer Gleichung 4.Grades erzeugt. Die Koeffizienten der Gleichung sind aus Q.
$\mathbf{G}_5$ hat 2 Elemente $\Longleftrightarrow$ K_{12} wird über Q(**i**) durch die Lösung einer Gleichung 2.Grades erzeugt. Die Koeffizienten der Gleichung sind aus Q(**i**).
Die Faktorgruppe von $\mathbf{G}(K_{12}) / \mathbf{G}_5$ hat 2 Elemente $\Longleftrightarrow$ Q(**i**) wird über Q durch die Lösung einer Gleichung 2.Grades erzeugt. Die Koeffizienten der Gleichung sind aus Q.
Analoge Aussagen hat man für $\mathbf{G}_7$ in bezug auf Q($\mathbf{e}_3$) und Q sowie für $\mathbf{G}_7$ in bezug auf Q($\sqrt{3}$) und Q.

Gleichung für alle Einheitswurzeln in K_{12}, Zerfällungskörper
Jedes 12-te Einheitswurzel ist eine Nullstelle des Polynoms $x^{12} - 1$.
Dies Polynom ist das Produkt folgender *irreduziblen*, d.h. in Q nicht weiter zerlegbaren Polynome:
$Q1 = x-1$, $Q2 = x+1$, $Q3 = x^2+x+1$, $Q4 = x^2+1$, $Q6 = x^2 - x + 1$, $Q12 = x^4 - x^2 + 1$.
Die Nullstellen dieser Polynome sind primitiven Einheitswurzeln der Ordnung 1, 2, 3, 4, 6 bzw.12.
Die Ordnungen der Einheitswurzeln sind die Teiler von 12. Daraus ergibt sich
$x^{12} - 1 = Q1*Q2*Q3*Q4*Q6*Q12$, denn die 12-ten Einheitswurzeln sind genau jene, die einen Teiler von 12 als Ordnung haben.

Das Produkt $Q3*Q4*Q6*Q12 = (x^{12}-1)/(x^2-1) = x^6 + x^4 + x^2 + 1$ hat im Grundkörper Q keine Nullstelle, zerfällt jedoch in K_{12} vollständig in Linearfaktoren.
Der Körper K_{12} ist der kleinste Zahlkörper über dem Grundkörper Q, in welchem das Polynom $x^{12}-1$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt. K_{12} ist durch diese Eigenschaft strukturell bestimmt. In dieser Sicht nennt man K_{12} den *Zerfällungskörper* von $x^{12} - 1$ über Q.

Gleichung für erzeugenden Elemente der Erweiterung $K_{12} = Q(\xi)$
Die Gleichung 4.Grades für erzeugende Elemente eines Modells des Körpers K_{12} über Q ist $x^4 - x^2 + 1 = 0$. Sie ist die in Q irreduzible *Kreisteilungsgleichung* für 12-te Einheitswurzeln.
Ihre Lösungen sind $\xi, \xi^5, \xi^7, \xi^{11}$.

Gleichungen für erzeugenden Elemente der Unterkörper
Q(**i**) : $x^2 + 1 = 0$. Ihre Lösungen sind **i** und **–i**.
Q($\mathbf{e}_3$) : $x^2 + x + 1 = 0$. Ihre Lösungen sind $\mathbf{e}_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathbf{i}$, $\mathbf{e}_3' = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathbf{i}$.
Q($\sqrt{3}$): $x^2 - 3 = 0$. Ihre Lösungen sind $\sqrt{3}$ und $-\sqrt{3}$.

Gleichungen mit Lösungen #0 in Q: $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$.
Die Lösungen 1 bzw. -1 erzeugen keine Erweiterung von Q .

Gleichungen für erzeugende Elemente von K_{12} als Erweiterung von Q(i)
$x^2 - 3 = 0$. mit den Lösungen **√3** und **-√3** .
oder z.B. $x^2 + x + 1 = 0$ mit den Lösungen $\mathbf{e_3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathbf{i}$, $\mathbf{e_3'} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathbf{i}$.

Gleichungen für erzeugende Elemente von K_{12} als Erweiterung von $Q(e_3)$
$x^2 - 3 = 0$. mit den Lösungen **√3** und **-√3** .
oder z.B. $x^2 + 1 = 0$. mit den Lösungen **i** und **-i** .

Gleichungen für erzeugende Elemente von K_{12} als Erweiterung von Q(√3)
$x^2 + 1 = 0$. mit den Lösungen **i** und **-i** .
oder z.B. $x^2 + x + 1 = 0$ mit den Lösungen $\mathbf{e_3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathbf{i}$, $\mathbf{e_3'} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathbf{i}$.

Anwendung einer Faktorgruppe zur Konstruktion eines Unterkörpers
Die Elemente der Faktorgruppe $\mathbf{G}(K_{12})/\mathbf{G}_5$ sind die Nebenklassen $\{id, \sigma_5\}$, $\{\sigma_7, \sigma_{11}\}$.
Deren Anwendung auf $\mathbf{i} = \xi^3$ ist wohldefiniert, denn sie ist nicht abhängig vom gewählten Repräsentanten aus der betreffenden Nebenklasse, und ergibt hier **i** bzw. **-i** .

Die Elemente der Faktorgruppe $\mathbf{G}(K_{12})/\mathbf{G}_7$ sind die Nebenklassen $\{id, \sigma_7\}$, $\{\sigma_5, \sigma_{11}\}$.
Deren Anwendung auf $\mathbf{e_3} = \xi^4$ ist wohldefiniert und ergibt $\mathbf{e_3}$ bzw. $\mathbf{e_3'}$.

Die Elemente der Faktorgruppe $\mathbf{G}(K_{12})/\mathbf{G}_{11}$ sind die Nebenklassen $\{id, \sigma_{11}\}$, $\{\sigma_5, \sigma_7\}$.
Deren Anwendung auf $\sqrt{3} = 2\xi - \xi^3$ ist wohldefiniert und ergibt **√3** bzw. **-√3** .

Konstruktion von K_{12} aus einem Unterkörper
$\mathbf{K_{12}}$ = **Q(i)(√3)** , d.h. Adjunktion von **√3** zu **Q(i)** ergibt $\mathbf{K_{12}}$
Untergruppe $\mathbf{G_5}$, Gleichung $x^2 - 3 = 0$, erzeugendes Element **√3** , $\sigma_5(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$.

$\mathbf{K_{12}}$ = $\mathbf{Q(i)(e_3)}$, d.h. Adjunktion von $\mathbf{e_3}$ zu **Q(i)** ergibt $\mathbf{K_{12}}$
Untergruppe $\mathbf{G_5}$, Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$, erzeugendes Element $\mathbf{e_3}$, $\sigma_5(\mathbf{e_3}) = \mathbf{e_3'}$.

$\mathbf{K_{12}}$ = $\mathbf{Q(e_3)}$**(√3)** , d.h. Adjunktion von **√3** zu $\mathbf{Q(e_3)}$ ergibt $\mathbf{K_{12}}$
Untergruppe $\mathbf{G_7}$, Gleichung $x^2 - 3 = 0$, erzeugendes Element **√3** , $\sigma_7(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$.

$\mathbf{K_{12}}$ = $\mathbf{Q(e_3)(i)}$, d.h. Adjunktion von **i** zu $\mathbf{Q(e_3)}$ ergibt $\mathbf{K_{12}}$
Untergruppe $\mathbf{G_7}$, Gleichung $x^2 + 1 = 0$, erzeugendes Element **i** , $\sigma_7(\mathbf{i}) = -\mathbf{i}$.

$\mathbf{K_{12}}$ = **Q(√3)(i)** , d.h. Adjunktion von **i** zu **Q(√3)** ergibt $\mathbf{K_{12}}$
Untergruppe $\mathbf{G_{11}}$, Gleichung $x^2 + 1 = 0$, erzeugendes Element **i** , $\sigma_{11}(\mathbf{i}) = -\mathbf{i}$.

$\mathbf{K_{12}}$ = **Q(√3)**$(\mathbf{e_3})$, d.h. Adjunktion von $\mathbf{e_3}$ zu **Q(√3)** ergibt $\mathbf{K_{12}}$
Untergruppe $\mathbf{G_{11}}$, Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$, erzeugendes Element $\mathbf{e_3}$, $\sigma_{11}(\mathbf{e_3}) = \mathbf{e_3'}$.